

## ĐỀ CHÍNH THỨC

## MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 120 phút (không tính thời gian giao đề)

**Câu 1 (2,0 điểm):**

a) Tính  $A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

b) Cho biểu thức  $B = \left( \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x+4}{4-x} \right) : \frac{x}{x-2\sqrt{x}}$  với  $x > 0$  và  $x \neq 4$ .

**Câu 2 (1,5 điểm):**Cho hàm số  $y = x^2$  có đồ thị (P) và đường thẳng (d):  $y = kx - 2k + 4$ .a) Vẽ đồ thị (P). Chứng minh rằng (d) luôn đi qua điểm  $C(2;4)$ .b) Gọi H là hình chiếu của điểm  $B(-4;4)$  trên (d). Chứng minh rằng khi k thay đổi ( $k \neq 0$ ) thì diện tích tam giác HBC không vượt quá 9 cm (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).**Câu 3 (1,5 điểm):**Cho phương trình  $x^2 + 4(m-1)x - 12 = 0$  (\*), với m là tham sốa) Giải phương trình (\*) khi  $m = 2$ b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn

$$4|x_1 - 2|\sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 8)^2.$$

**Câu 4 (1,5 điểm):**

a) Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 2021 và hiệu của số lớn và số bé bằng 15.

b) Một địa phương lên kế hoạch xét nghiệm SARS-CoV-2 cho 12000 người trong một thời gian quy định. Nhờ cải tiến phương pháp nên mỗi giờ xét nghiệm được thêm 1000 người. Vì thế, địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch là 16 giờ. Hỏi theo kế hoạch, địa phương này phải xét nghiệm trong thời gian bao nhiêu giờ?

**Câu 5 (3,5 điểm):**Cho tam giác nhọn ABC ( $AB < AC$ ), các đường cao BD, CE ( $D \in AC, E \in AB$ ) cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác BEDC nội tiếp.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn đường kính AH cắt AM tại điểm G (G khác A). Chứng minh rằng  $AE \cdot AB = AG \cdot AM$ c) Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng  $\angle MAC = \angle GCM$  và hai đường thẳng nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MBE, MCD song song với đường thẳng KG.

Loigiaihay.com

Loigiaihay.com

Loigiaihay.com

Loigiai

Loigiaihay.com

Loigiaihay.com

Loigiaiha

Loigiaihay.com

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

**Câu 1****Phương pháp:**

$$\text{a) Sử dụng hằng đẳng thức: } \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

Thực hiện các phép tính với căn bậc hai.

$$\text{b) Vận dụng hằng đẳng thức } a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \text{ xác định mẫu thức chung của biểu thức}$$

Quy đồng các phân thức, thực hiện các phép toán từ đó rút gọn được biểu thức.

**Cách giải:**

a) Ta có:

$$A = \sqrt{4} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$$

$$A = \sqrt{2^2} + \sqrt{3 \cdot 12}$$

$$A = 2 + \sqrt{6^2}$$

$$A = 2 + 6$$

$$A = 8$$

Vậy  $A = 8$ .

b) Với  $x > 0$ ,  $x \neq 4$  ta có:

$$B = \left( \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x+4}{4-x} \right) : \frac{x}{x-2\sqrt{x}}$$

$$B = \left( \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x+4}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \right) : \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) + x + 4}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x} - x + x + 4}{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

$$B = -\frac{2\sqrt{x} + 4}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$B = -\frac{2(\sqrt{x} + 2)}{2 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$B = -\frac{2}{\sqrt{x}}$$

Vậy với  $x > 0$ ,  $x \neq 4$  thì  $B = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ .

**Câu 2****Phương pháp:**

a) Vẽ đồ thị của hàm số  $y = ax^2 (a \neq 0)$

+ Nhận xét về hệ số  $a$  và sự biến thiên của hàm số

+ Lập bảng giá trị tương ứng của  $x$  và  $y$

+ Xác định được các điểm mà đồ thị đi qua, vẽ đồ thị.

Thay  $x = 2; y = 4$  vào phương trình đường thẳng  $(d): y = kx - 2k + 4$ , ta chứng minh được điều luôn đúng, từ đó có được điều phải chứng minh.

b) Tính diện tích  $\Delta HBC$

Áp dụng định lý Py – ta – go, tính được  $BC$

Biện luận, từ đó chứng minh được yêu cầu của đề bài.

**Cách giải:**

a) Parabol  $(P): y = x^2$  có bề lõm hướng lên và nhận  $Oy$  làm trục đối xứng.

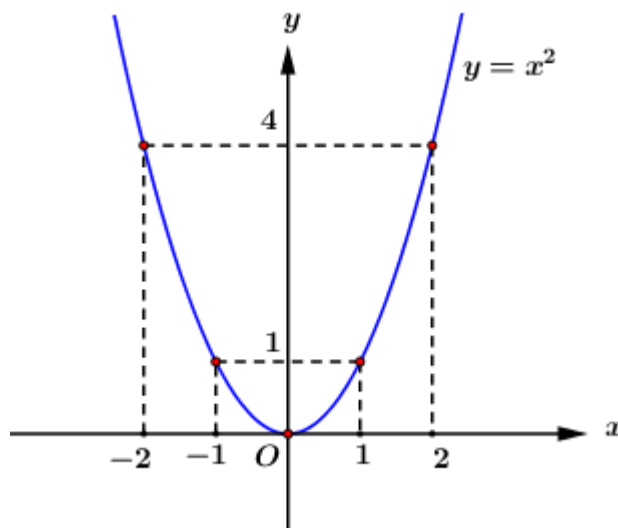
Hệ số  $a = 1 > 0$  nên hàm số đồng biến khi  $x > 0$  và nghịch biến khi  $x < 0$ .

Ta có bảng giá trị sau:

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

$\Rightarrow$  Parabol  $(P): y = x^2$  đi qua các điểm  $(-2;4), (-1;1), (0;0), (1;1), (2;4)$ .

Đồ thị Parabol  $(P): y = x^2$ :

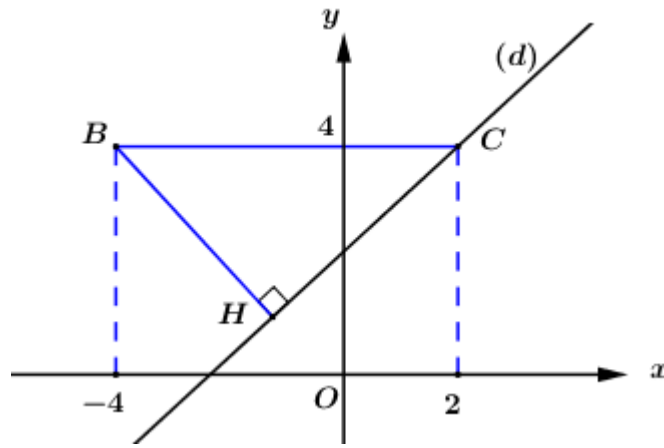


Thay  $x = 2; y = 4$  vào phương trình đường thẳng  $(d): y = kx - 2k + 4$ . ta được:

$$4 = 2k - 2k + 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ (luôn đúng với mọi } k)$$

Vậy  $(d)$  luôn đi qua điểm  $C(2;4)$  với mọi  $m$ .

b)



Vì  $\triangle HBC$  vuông tại  $H$  nên ta có  $S_{\triangle HBC} = \frac{1}{2}HB.HC \leq \frac{1}{4}.(HB^2 + HC^2)$ .

Áp dụng định lí Py – ta – go, ta có:  $HB^2 + HC^2 = BC^2 = 6^2 = 36$ .

$\Rightarrow S_{\triangle HBC} \leq \frac{1}{4}.36 = 9$  (đpcm).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $HB = HC \Rightarrow \triangle HBC$  vuông cân tại  $H$ .

**Câu 3**

**Phương pháp:**

a) Thay  $m = 2$  phương trình (\*)

Tính  $\Delta = b^2 - 4ac$  (hoặc  $\Delta' = (b')^2 - ac$ ), sử dụng công thức nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \text{), tính được nghiệm của phương trình, kết luận.}$$

b) Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  có hai nghiệm phân biệt  $\Delta > 0$  (hoặc  $\Delta' > 0$ )

Áp dụng hệ thức Vi – ét, tính được  $x_1 + x_2; x_1.x_2$  theo  $m$

Vì  $x_2$  là nghiệm của phương trình (\*) nên:  $2\sqrt{4 - mx_2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2} = |x_2 - 2|$

Khi đó, thay vào  $4|x_1 - 2|\sqrt{4 - mx_2} = (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 8)^2$ , tìm được giá trị  $m$

**Cách giải:**

a) Thay  $m = 2$  vào phương trình (\*) ta có:

$$x^2 + 4(2-1)x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

Ta có:  $\Delta' = 2^2 + 12 = 16 = 4^2 > 0$  nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt  $\begin{cases} x = -2 + 4 = 2 \\ x = -2 - 4 = -6 \end{cases}$ .

Vậy với  $m = 2$  thì tập nghiệm của phương trình (\*) là  $S = \{2; -6\}$ .

b) Phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 + 12 > 0$  (luôn đúng với mọi  $m$ ).

$\Rightarrow$  Phương trình (\*) luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  với mọi  $m$ .

Khi đó, áp dụng định lí Vi-ét ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -4(m-1) = 4(1-m) & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -12 & (2) \end{cases}$$

Vì  $x_2$  là nghiệm của phương trình (\*) nên:

$$\begin{aligned} x_2^2 + 4(m-1)x_2 - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_2^2 + 4mx_2 - 4x_2 - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_2^2 + 4(mx_2 - 4) - 4x_2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(4 - mx_2) = x_2^2 - 4x_2 + 4 = (x_2 - 2)^2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{4 - mx_2} = \sqrt{(x_2 - 2)^2} = |x_2 - 2| \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} 4|x_1 - 2|\sqrt{4 - mx_2} &= (x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 8)^2 \\ \Leftrightarrow 2|x_1 - 2||x_2 - 2| &= [4(1-m) + 12 - 8]^2 \\ \Leftrightarrow 2|x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4| &= (8 - 4m)^2 \\ \Leftrightarrow 2|-12 - 2.4(1-m) + 4| &= 64 - 64m + 16m^2 \\ \Leftrightarrow |-16 + 8m| &= 8(m^2 - 4m + 4) \\ \Leftrightarrow |m - 2| &= (m - 2)^2 \\ \Rightarrow (m - 2)^2 &= (m - 2)^4 \\ \Leftrightarrow (m - 2)^4 - (m - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m - 2)^2 \cdot [(m - 2)^2 - 1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m - 2 = 1 \\ m - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy  $m \in \{1; 2; 3\}$  là các giá trị thỏa mãn bài toán.

#### Bài 4

##### Phương pháp:

a) Gọi số lớn là  $x$  ( $x > 15$ ,  $x \in \mathbb{N}$ ), số bé là  $y$  ( $y \in \mathbb{N}$ ).

Từ giả thiết tổng và hiệu của hai số lập được hệ phương trình

Sử dụng phương pháp cộng đại số, tìm được nghiệm  $x$

Sử dụng phương pháp thế, tìm được nghiệm  $y$

Đối chiếu điều kiện, kết luận.

b) Theo kế hoạch, gọi số người được xét nghiệm trong một giờ là  $x$  (người) ( $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $x < 12000$ )

Từ đó, tính được thời gian xét nghiệm theo kế hoạch và thời gian xét nghiệm thực tế.

Từ giả của đề bài, lập được phương trình.

Giải phương trình, đối chiếu điều kiện và kết luận.

### Cách giải:

a) Gọi số lớn là  $x$  ( $x > 15$ ,  $x \in \mathbb{N}$ ), số bé là  $y$  ( $y \in \mathbb{N}$ ).

Ta có tổng của hai số là 2021 nên ta có phương trình  $x + y = 2021$  (1)

Hiệu của số lớn và số bé là 15 nên ta có phương trình  $x - y = 15$  (2)

Từ (1),(2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2021 \\ x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2036 \\ y = x - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1018 \\ y = 1003 \end{cases} (tm)$$

Vậy số lớn là 1018, số bé là 1003.

b) Theo kế hoạch, gọi số người được xét nghiệm trong một giờ là  $x$  (người) ( $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $x < 12000$ )

Theo kế hoạch địa phương ý xét nghiệm 12000 người hết  $\frac{12000}{x}$  (giờ)

Thực tế, số người được xét nghiệm trong một giờ là  $x + 1000$  (người)

Thực tế, địa phương ý xét nghiệm 12000 người hết  $\frac{12000}{x + 1000}$  (giờ)

Vì địa phương này hoàn thành sớm hơn kế hoạch 16 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{12000}{x} - \frac{12000}{x + 1000} = 16$$

$$\Leftrightarrow 12000(x + 1000) - 12000x = 16x(x + 1000)$$

$$\Leftrightarrow 12000x + 12000000 - 12000x = 16x^2 + 16000x$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 16000x - 12000000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1000x - 750000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1500x - 500x - 750000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1500) - 500(x + 1500) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1500)(x - 500) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1500 = 0 \\ x - 500 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1500 (ktm) \\ x = 500 (tm) \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch, địa phương này cần  $\frac{12000}{500} = 24$  (giờ) để xét nghiệm xong.

### Câu 5

#### Phương pháp:

a) Vận dụng dấu hiệu nhận biết: Tứ giác có hai đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp.

b) + Chứng minh được:  $\angle ABC = \angle AGE$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  $AE$ )



+ Chứng minh:  $\Delta ABM \sim \Delta AGE$  (g.g)  $\Rightarrow AE \cdot AB = AG \cdot AM$

c) + Chứng minh được: Đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác  $MBE, MCD$  là đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác  $GDCM$  và  $EBMG$ , suy ra đường nối tâm vuông góc với  $GM$  (\*)

Gọi  $\{F\} = AH \cap BC$

Chứng minh:  $\angle BAC = \angle DFM$ ,  $\angle EDH = \angle EAH$ ,  $\angle HDM = \angle HAD$  từ đó, suy ra  $\angle EDM = \angle KDM$

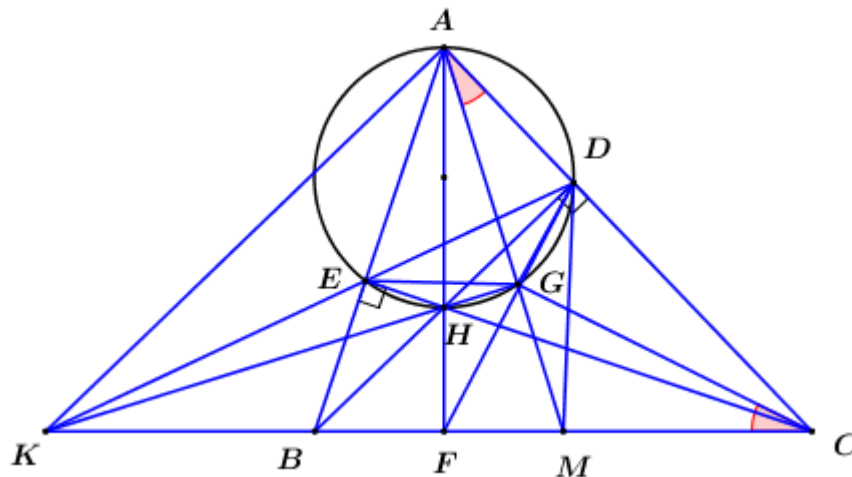
Chứng minh:  $AGFK$  là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \angle AFK = \angle AGK = 90^\circ$

$\Rightarrow KG \perp GM$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác  $MBE, MCD$  song song với  $KG$  (đpcm)

**Cách giải:**



a) Ta có:  $BD, CE$  là các đường cao của  $\Delta ABC$  nên  $\begin{cases} BD \perp AC \\ CE \perp AB \end{cases} \Rightarrow \angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$

$\Rightarrow BEDC$  là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề một cạnh cùng nhìn cạnh đối diện các góc bằng nhau).

b) Ta có:  $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ \Rightarrow \angle AEH + \angle ADH = 180^\circ$

$\Rightarrow AEHD$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AH$  (định nghĩa)

Mà đường tròn đường kính  $AH$  cắt  $AM$  tại  $G$ .

$\Rightarrow$  Năm điểm  $A, E, H, G, D$  cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \angle AGE = \angle ADE$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  $AE$ )

Mà  $\angle ABC = \angle ADE$  (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp  $BEDC$ )

$\Rightarrow \angle ABC = \angle AGE$ .

Xét  $\Delta ABM$  và  $\Delta AGE$  có:  $\angle ABC = \angle AGE$  (cmt);  $\angle BAM$  chung.

$\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta AGE$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AG}{AB}$  (2 cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow AE \cdot AB = AG \cdot AM$  (đpcm)



c) Ta có  $\angle AGD = \angle AED$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  $AD$ )

Mà  $\angle AED = \angle ACB$  (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp  $BEDC$ )

$$\Rightarrow \angle AGD = \angle ACB = \angle DCM.$$

Lại có  $\angle AGD + \angle DGM = 180^\circ$  (kề bù)  $\Rightarrow \angle DGM + \angle DCM = 180^\circ$ .

$\Rightarrow GDCM$  là tứ giác nội tiếp (dnhb)  $\Rightarrow \angle MGC = \angle MDC$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $MC$ ).

Lại có  $DM = \frac{1}{2}BC = MC$  (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông)  $\Rightarrow \Delta MCD$  cân tại  $M$ .

$\Rightarrow \angle MDC = \angle MCD$  (2 góc ở đáy của tam giác cân).

$$\Rightarrow \angle MGC = \angle MCD = \angle MCA.$$

Xét  $\Delta GCM$  và  $\Delta CAM$  có:  $\angle AMC$  chung;  $\angle MAC = \angle GCM$  (cmt)

$\Rightarrow \Delta GCM \sim \Delta CAM$  (g.g)  $\Rightarrow \angle MAC = \angle GCM$  (2 góc tương ứng (đpcm)).

Ta có  $\angle ABC = \angle AGE$  (cmt) nên  $EBMG$  là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

$\Rightarrow$  Đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác  $MBE, MCD$  là đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác  $GDCM$  và  $EBMG$ .

Giao của hai tứ giác  $GDCM$  và  $EBMG$  là  $GM$ .

$\Rightarrow$  Đường nối tâm vuông góc với  $GM$  (\*).

Gọi  $\{F\} = AH \cap BC \Rightarrow AF \perp BC \Rightarrow \angle AFB = 90^\circ$ .

Mà  $\angle BDA = 90^\circ \Rightarrow ADFB$  nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \angle BAC = \angle DFM$  (1) (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Mà  $\angle EDH = \angle EAH$  (2) (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $EH$ ).

$$\angle HDM = \angle HBM = \angle DBM \quad (DM \text{ là trung tuyến của } \Delta BDC \text{ vuông tại } D \text{ nên } DM = \frac{1}{2}BC = BM).$$

$$\angle DBM = \angle HAD \quad (\text{Cùng phụ } \angle ACB)$$

$$\Rightarrow \angle HDM = \angle HAD \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\angle EDM = \angle EDH + \angle HDM = \angle EAH + \angle HAD = \angle BAC = \angle DFM = \angle KDM$$

Xét  $\Delta FDM$  và  $\Delta DKM$  có:  $\angle KMD$  chung;  $\angle DFM = \angle KDM$  (cmt)

$$\Rightarrow \Delta FDM \sim \Delta DKM \quad (g.g) \Rightarrow \frac{MD}{KM} = \frac{FM}{MD} \Rightarrow MD^2 = FM \cdot KM$$

$$\text{Có: } \Delta GCM \sim \Delta CAM \quad (\text{cmt}) \Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{GM}{MC} \Rightarrow MC^2 = MG \cdot MA$$

$$\text{Mà } MD = MC \quad (\text{cmt}) \Rightarrow FM \cdot KM = MG \cdot MA \Rightarrow \frac{FM}{GM} = \frac{MA}{MK}$$

$\Rightarrow \triangle FGM \sim \triangle AKM$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle FGM = \angle AKM$  (2 góc tương ứng)

$\Rightarrow AGFK$  là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

$\Rightarrow \angle AFK = \angle AGK = 90^\circ$  (2 góc nội tiếp cùng chắn cung  $AK$ )  $\Rightarrow KG \perp AG$  hay  $KG \perp GM$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra đường nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác  $MBE, MCD$  song song với  $KG$  (đpcm).