CHUYÊN ĐỀ 6:

PHÂN SỐ. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ

ÔN HÈ MÔN: TOÁN - LỚP 6

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Dạng 6. Dãy phân số viết theo quy luật

A. Lý thuyết

Phát hiện quy luật của dãy số

Dạng tổng quát: $\dfrac{k}{(n-k).n}=\dfrac{n-(n-k)}{(n-k).n}=\dfrac{n}{(n-k).n}-\dfrac{n-k}{(n-k).n}=\dfrac{1}{n-k}-\dfrac{1}{n}$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp: Viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau.

B. Bài tập

Bài 1:

Tính:

a) A = $2017:\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{2017.2018}\right)$

b) b) $B=\dfrac{3}{2.5}+\dfrac{3}{5.8}+\dfrac{3}{8.11}+\ldots+\dfrac{3}{2016.2019}$

c) $C=\dfrac{2}{1.7}+\dfrac{2}{7.13}+\dfrac{2}{13.19}+\ldots+\dfrac{2}{2013.2019}$

d) $D=\dfrac{7}{1.9}+\dfrac{7}{9.17}+\dfrac{7}{17.25}+\ldots+\dfrac{7}{2011.2019}$

e) $E=\dfrac{3^2}{1.4}+\dfrac{3^2}{4.7}+\dfrac{3^2}{7.10}+\ldots+\dfrac{3^2}{2017.2020}$

f) $F=\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\ldots+\dfrac{1}{18.19.20}$

Bài 2:

Tính các tổng sau:

a) $A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\ldots+\dfrac{1}{2^{2020}}$

b) $B=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\ldots+\dfrac{1}{2048}$

Bài 3:

a) Tính tổng sau: $A=\dfrac{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+2020)}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}$

b) Chứng minh rằng biểu thức B có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ với $B=\frac{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}{1.2+2.3+3.4+\ldots+2020.2021}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Bài 1:

Tính:

a) A = $2017:\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2017.2018}\right)$

b) b) $B=\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{8.11}+\ldots+\frac{3}{2016.2019}$

c) $C=\frac{2}{1.7}+\frac{2}{7.13}+\frac{2}{13.19}+\ldots+\frac{2}{2013.2019}$

d) $D=\frac{7}{1.9}+\frac{7}{9.17}+\frac{7}{17.25}+\ldots+\frac{7}{2011.2019}$

e) $E=\frac{3^2}{1.4}+\frac{3^2}{4.7}+\frac{3^2}{7.10}+\ldots+\frac{3^2}{2017.2020}$

f) $F=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{18.19.20}$

Phương pháp

Nhận xét: Tử số bằng hiệu của các thừa số ở mẫu.

Dạng tổng quát: $\frac{k}{(n-k).n}=\frac{n-(n-k)}{(n-k).n}=\frac{n}{(n-k).n}-\frac{n-k}{(n-k).n}=\frac{1}{n-k}-\frac{1}{n}$

Áp dụng phương pháp khử liên tiếp: Viết mỗi số hạng thành hiệu của hai số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau.

Lời giải

$2017:\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2017.2018}\right)$

$=2017:\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)$

$=2017:\left(1-\frac{1}{2018}\right)$

$=2017:\frac{2017}{2018}$

$=2017.\frac{2018}{2017}=2018.$

Vậy $x=\frac{-2}{3}$

b) $B=\frac{3}{2.5}+\frac{3}{5.8}+\frac{3}{8.11}+\ldots+\frac{3}{2016.2019}$

$$= \frac{5-2}{2.5} + \frac{8-5}{5.8} + \frac{11-8}{8.11} + \ldots + \frac{2019-2016}{2016.2019}$$

$$= \frac{5}{2.5} - \frac{2}{2.5} + \frac{8}{5.8} - \frac{5}{5.8} + \frac{11}{8.11} - \frac{8}{8.11} + \ldots + \frac{2019}{2016.2019} - \frac{2016}{2016.2019}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2019}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2019}$$

$$= \frac{2019-2}{2.2019}$$

$$= \frac{2017}{4038}.$$

c) $C = \frac{2}{1.7} + \frac{2}{7.13} + \frac{2}{13.19} + \ldots + \frac{2}{2013.2019}$

Xét từng phân số ta thấy: Hiệu 2 thừa số ở mẫu bằng 6 $\Rightarrow$ Nhân cả 2 vế của biểu thức với 3.

$$\Rightarrow 3C = 3\cdot\left(\frac{2}{1.7} + \frac{2}{7.13} + \frac{2}{13.19} + \ldots + \frac{2}{2013.2019}\right)$$

$$= \frac{6}{1.7} + \frac{6}{7.13} + \frac{6}{13.19} + \ldots + \frac{6}{2013.2019}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{19}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2019}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \ldots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2019}$$

$$= 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}$$

$$\Rightarrow 3C = \frac{2018}{2019} \Rightarrow C = \frac{2018}{2019} : 3 = \frac{2018}{2019}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2018}{6057}$$

d) $D = \frac{7}{1.9} + \frac{7}{9.17} + \frac{7}{17.25} + \ldots + \frac{7}{2011.2019}$

$$\Rightarrow D = 7\cdot\frac{8}{8}\cdot\left(\frac{1}{1.9} + \frac{1}{9.17} + \frac{1}{17.25} + \ldots + \frac{1}{2011.2019}\right)$$

$$= \frac{7}{8}\cdot\left(\frac{8}{1.9} + \frac{8}{9.17} + \frac{8}{17.25} + \ldots + \frac{8}{2011.2019}\right)$$

$$= \frac{7}{8}\cdot\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2019}\right)$$

$$= \frac{7}{8}\cdot\left(1 - \frac{1}{2019}\right) = \frac{7}{8}\cdot\left(\frac{2019}{2019} - \frac{1}{2019}\right)$$

$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{2018}{2019} = \frac{7.1009}{4.2019} = \frac{7063}{8076}$$

Vậy $D = \frac{7063}{8076}$.

e) $E=\frac{3^2}{1.4}+\frac{3^2}{4.7}+\frac{3^2}{7.10}+\ldots+\frac{3^2}{2017.2020}$

$=\frac{3.3}{1.4}+\frac{3.3}{4.7}+\frac{3.3}{7.10}+\ldots+\frac{3.3}{2017.2020}$

$=3\cdot\left(\frac{3}{1.4}+\frac{3}{4.7}+\frac{3}{7.10}+\ldots+\frac{3}{2017.2020}\right)$

$=3\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2020}\right)$

$=3\cdot\left(1-\frac{1}{2020}\right)=3\cdot\left(\frac{2020}{2020}-\frac{1}{2020}\right)$

$=3\cdot\frac{2019}{2020}=\frac{6057}{2020}$

Vậy $E=\frac{6057}{2020}\cdot$

f) $F=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{18.19.20}$

Ta xét:

$\frac{2}{1.2.3}=\frac{3-1}{1.2.3}=\frac{3}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}$

$\frac{2}{2.3.4}=\frac{4-2}{2.3.4}=\frac{4}{2.3.4}-\frac{2}{2.3.4}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}$

....

$\frac{2}{18.19.20}=\frac{20-18}{18.19.20}=\frac{20}{18.19.20}-\frac{18}{18.19.20}=\frac{1}{18.19}-\frac{1}{19.20}$

Tổng quát: $\frac{1}{n.(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow F=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{18.19.20}$

$\Rightarrow 2F=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+\ldots+\frac{2}{18.19.20}$

$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{18.19}-\frac{1}{19.20}$

$=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{19.20}=\frac{19.10-1}{19.20}=\frac{190-1}{380}=\frac{189}{380}$

$\Rightarrow F=\frac{189}{380}:2=\frac{189}{380}\cdot\frac{1}{2}=\frac{189}{760}$

Vậy $F=\frac{189}{760}\cdot$

Bài 2:

Tính các tổng sau:

a) $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2020}}$

b) $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2048}$

Phương pháp

Xét các phân số có tử bằng nhau và có mẫu là lũy thừa tăng dần của cùng 1 cơ số thì ta nhân cả 2 vế với đúng cơ số đó. Trường hợp tổng quát:

$$A=\frac{1}{a^1}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^n}\Rightarrow A.a=a\left(\frac{1}{a^1}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^n}\right)=1+\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{a^{n-1}}$$

Lời giải

a) $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2020}}$

$\Rightarrow 2A=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2020}}\right)$

$\Rightarrow 2A=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+2\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots+2\cdot\frac{1}{2^{2020}}$

$\Rightarrow 2A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2019}}$

$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2020}}$

$\Rightarrow 2A-A=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2019}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2020}}\right)$

$\Rightarrow A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2019}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\ldots-\frac{1}{2^{2020}}$

$\Rightarrow A=1-\frac{1}{2^{2020}}=\frac{2^{2020}-1}{2^{2020}}$

Vậy $A=\frac{2^{2020}-1}{2^{2020}}$.

b) $B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2048}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{11}}$

$\Rightarrow 2B=2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{11}}\right)$

$\Rightarrow 2B=2.1+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+2\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots+2\cdot\frac{1}{2^{11}}$

$\Rightarrow 2B=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}$

$\Rightarrow 2B=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{10}}$

$$B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{11}}$$

$$\Rightarrow 2B-B=2-\frac{1}{2^{11}}\Rightarrow B=\frac{2^{12}-1}{2^{11}};$$

Vậy $B=\frac{2^{12}-1}{2^{11}}$.

Bài 3:

a) Tính tổng sau: $A=\frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+2020)}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}$

b) Chứng minh rằng biểu thức B có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ với $B=\frac{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}{1.2+2.3+3.4+\ldots+2020.2021}$.

Phương pháp

+) Áp dụng quy tắc dấu ngoặc, nhóm các hạng tử.

+) Áp dụng công thức tính tổng của 1 dãy các số tự nhiên liên tiếp: $1+2+\ldots+n=\frac{n+1}{2}\cdot n=\frac{n.(n+1)}{2}$

Lời giải

a) $A=\frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+2020)}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}$

Ta có:

$$\begin{aligned}A&=\frac{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+2020)}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}\\&=\frac{1+1+2+1+2+3+\ldots+1+2+3+\ldots2020}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}\\&=\frac{(1+1+1+\ldots+1)+(2+2+\ldots2)+(3+3+3+3\ldots)+\ldots+2020}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}\\&=\frac{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}\\&=1\end{aligned}$$

b) Chứng minh rằng biểu thức B có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ với $B=\frac{1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1}{1.2+2.3+3.4+\ldots+2020.2021}$.

Với biểu thức B, xét tử số ta có:

$$\begin{aligned}&1.2020+2.2019+3.2018+\ldots+2020.1\\&=1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+2020)\\&=\frac{0+1}{2}\cdot 2+\frac{1+2}{2}\cdot 2+\frac{1+3}{2}\cdot 3+\ldots+\frac{1+2020}{2}\cdot 2020\\&=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{2}\cdot 2+\frac{4}{2}\cdot 3+\ldots+\frac{2021}{2}\cdot 2020\\&=\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\ldots+\frac{2020.2021}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 2020.2021)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1.2020 + 2.2019 + 3.2018 + \ldots + 2020.1}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 2020.2021}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot (1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 2020.2021)}{1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + 2020.2021} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $B = \frac{1}{2}\cdot$