SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1:

Cho $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ (với $x>0,\ x\neq 1$).

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm x để giá trị của A và B trái dấu.

Câu 2:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=4m-5 \\ 2x+y=3m \end{cases}$ với m là tham số.

a) Giải hệ phương trình khi $m=3$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;\,y)$ thỏa mãn $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-1$.

Câu 3:

Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): \ y=3mx+1-m^2$ (m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;-9)$.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1;\,x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=2x_1x_2$.

Câu 4:

Qua điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến $MA,\ MB$ ($A,\ B$ là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D).

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và $MO\perp AB$.

b) Chứng minh $MA.AD=MD.AC$.

c) Gọi I là trung điểm của dây cung CD và E là giao điểm của hai đường thẳng AB và OI. Tính độ dài đoan thẳng OE theo R khi $OI=\dfrac{R}{3}$.

d) Qua tâm O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt đường thẳng $MA,\ MB$ lần lượt tại P và Q. Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-3x^2-4x\sqrt{y}+16x-2y+12\sqrt{y}+1998$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1 (2,0 điểm)

Cách giải:

Cho $A=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ ***và*** $B=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ ***(với*** $x>0,\ x\ne 1$***).***

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$***.***

Thay $x=9\ (TMDK)$ vào biểu thức A ta có:

$$A=\frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}-1}=\frac{3+1}{3-1}=\frac{4}{2}=2.$$

Vậy khi $x=9$ thì $A=2$.

b) Rút gọn biểu thức B.

Với $x>0,\ x\ne 1$ thì:

$$B=\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right):\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$B=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$B=\frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}:\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$B=\frac{4\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}.\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$B=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x>0,\ x\ne 1$ thì $B=\frac{4}{\sqrt{x}+1}$.

c) Tìm x ***để giá trị của A và B trái dấu.***

Để giá trị của A và B trái dấu thì $A.B<0$.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.\frac{4}{\sqrt{x}+1}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-1}<0$$

Vì $4>0$ nên $\frac{4}{\sqrt{x}-1}<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<1 \Leftrightarrow x<1$.

Kết hợp điều kiện $x>0,\ x\neq 1$ ta có $0<x<1$.

Vậy để giá trị của A và B trái dấu thì $0<x<1$.

Câu 2 (2 điểm)

Cách giải:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=4m-5 \\ 2x+y=3m \end{cases}$ ***với*** m ***là tham số.***

a) Giải hệ phương trình khi $m=3$.

Với $m=3$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=7 \\ 4x+2y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=25 \\ y=9-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=9-2.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy với $m=3$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;\ y)=(5;-1)$.

b) Tìm m ***để hệ phương trình có nghiệm*** $(x;\ y)$ ***thỏa mãn*** $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=-1$.

Ta có: $\begin{cases} x-2y=4m-5 & (1) \\ 2x+y=3m & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: $y=3m-2x$

Thế vào phương trình (1) ta có:

$$\begin{aligned}
&(1) \Leftrightarrow x-2(3m-2x)=4m-5 \\
&\Leftrightarrow x-6m+4x=4m-5 \\
&\Leftrightarrow 5x=10m-5 \\
&\Leftrightarrow x=2m-1 \\
&\Rightarrow y=3m-2x \\
&\Leftrightarrow y=3m-2(2m-1) \\
&\Leftrightarrow y=3m-4m+2 \\
&\Leftrightarrow y=-m+2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Với mọi m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;\ y)=(2m-1;\ -m+2)$.

Theo đề bài ta có: $\frac{2}{x}-\frac{1}{y}=-1\ (*)$

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1\neq 0 \\ -m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \frac{1}{2}. \\ m\neq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \dfrac{2}{2m-1} - \dfrac{1}{-m+2} = -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{2m-1} + \dfrac{1}{m-2} + 1 = 0$

$\Rightarrow (2m-1)(m-2) + 2(m-2) + 2m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 + 2m - 4 + 2m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 3m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2m(m+1) - 3(m+1) = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(2m-3) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ 2m-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\ (tm) \\ m=\dfrac{3}{2}\ (tm) \end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ và $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 3 (2 điểm)

Cách giải:

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d):\ y = 3mx + 1 - m^2$ (m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;-9)$.

Đường thẳng $(d):\ y = 3mx + 1 - m^2$ đi qua điểm $A(1;-9)$

$\Rightarrow -9 = 3m.1 + 1 - m^2$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 9 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0$

Phương trình có $\Delta = (-3)^2 + 4.10 = 49 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{3+\sqrt{49}}{2} = 5 \\ m_2 = \dfrac{3-\sqrt{49}}{2} = -2 \end{array}\right.$.

Vậy $m=-2$ hoặc $m=5$ thỏa mãn bài toán.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là:

$$x^2 = 3mx + 1 - m^2 \Leftrightarrow x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0\quad (*)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ giao điểm là x_1, x_2

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta > 0$

$\Leftrightarrow (3m)^2 - 4(m^2 - 1) > 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 4m^2 + 4 > 0$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 4 > 0\ \forall m$

$\Rightarrow$ Với mọi m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2.

Áp dụng hệ thức Vi-et với phương trình $(*)$ ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$.

Theo đề bài ta có:

$x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

$\Leftrightarrow 3m = 2(m^2 - 1)$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 = 0$

Phương trình có $\Delta = (-3)^2 + 4.2.2 = 25 > 0$

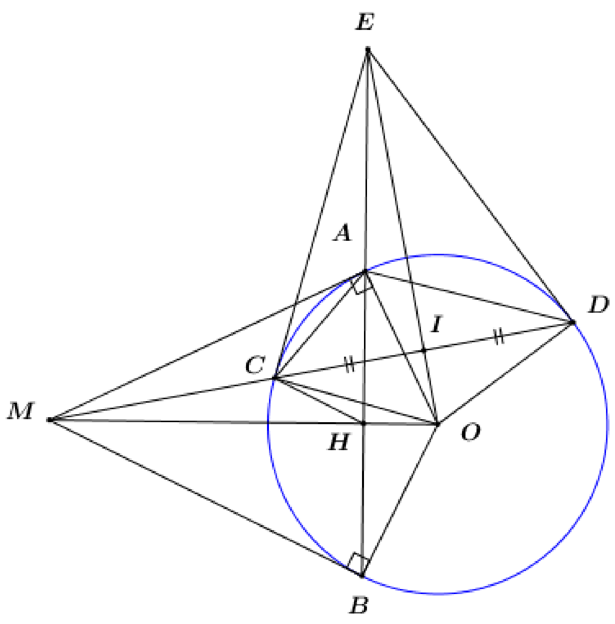
$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2.2} = 2 \\ m_2 = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2.2} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy $m = -\dfrac{1}{2}$ và $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cách giải:

Qua điểm M nằm bên ngoài đường tròn $(O;R)$, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D).



a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp và $MO \perp AB$.

Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\angle OAM = \angle OBM = 90^0$.

Xét tứ giác $MAOB$ có: $\angle OAM + \angle OBM = 90^0 + 90^0 = 180$.

$\Rightarrow MAOB$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

Vì $OA = OB \ (= R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB.

$MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB.

$\Rightarrow MO$ là trung trực của đoạn thẳng AB.

Vậy $MO \perp AB$ (đpcm).

b) Chứng minh $MA.AD = MD.AC$.

Xét ΔMAC và ΔMDA có:

$\angle AMD$ chung;

$\angle MAC = \angle MDA$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC).

$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDA \ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{AC}{AD}$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow MA.AD = MD.AC \ (dpcm)$.

c) Gọi I là trung điểm của dây cung CD và E là giao điểm của hai đường thẳng AB và OI. Tính độ dài đoạn thẳng OE theo R khi $OI = \dfrac{R}{3}$.

Gọi $AB \cap OM = \{H\}$, theo ý a) ta có $OM \perp AB$ tại H.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM, đường cao AH ta có: $OA^2 = OH.OM$.

Mà $OA = OC \ (= R)$ nên $OC^2 = OH.OM \Rightarrow \dfrac{OC}{OH} = \dfrac{OM}{OC}$.

Xét ΔOCH và ΔOMC có: $\angle COM$ chung; $\dfrac{OC}{OH} = \dfrac{OM}{OC}$ (cmt).

$\Rightarrow \Delta OCH \sim \Delta OMC \ (c.g.c) \Rightarrow \angle OCH = \angle OMC = \angle OMI \ (1)$ (hai góc tương ứng).

Vì I là trung điểm của $CD \ (gt)$ nên $OI \perp CD$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow \Delta OMI$ vuông tại $I \Rightarrow \angle OMI + \angle MOI = 90^0$.

Lại có: $\angle OEH + \angle EOH = 90^0$ (do tam giác OEH vuông tại H).

Mà $\angle MOI = \angle EOH$ nên $\angle OMI = \angle OEH \ (2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle OCH = \angle OEH \ (= \angle OMI)$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $OECH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 góc kề cùng nhìn 1 cạnh dưới các goác bằng nhau).

$\Rightarrow \angle OCE = \angle OHE = 90^0$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OE).

$\Rightarrow \Delta OCE$ vuông tại C, có đường cao CI.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OCE ta có:

$$OC^2 = OI.OE \Rightarrow OE = \frac{OC^2}{OI} = \frac{R^2}{\frac{R}{3}} = 3R.$$

Vậy khi $OI = \frac{R}{3}$ thì $OE = 3R$.

d) Qua tâm O kẻ đường thẳng vuông góc với OM cắt đường thẳng MA, MB lần lượt tại P và Q. Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $OM = x\ (x > R)$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OMP, đường cao OA ta có:

$$\frac{1}{OA^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{OP^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - R^2}{x^2R^2}$$
$$\Rightarrow OP = \frac{xR}{\sqrt{x^2 - R^2}}$$

Xét tam giác MPQ có đường cao MO đồng thời là đường phân giác (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) nên ΔMPQ là tam giác cân tại M, do đó đường cao MO cũng đồng thời là đường trung tuyến.

$$\Rightarrow PQ = 2OP = \frac{2xR}{\sqrt{x^2 - R^2}}.$$

Khi đó $S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{2}MO.PQ = \frac{1}{2}.x.\frac{2xR}{\sqrt{x^2 - R^2}} = R.\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$.

Ta có: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \frac{x^2 - R^2 + R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} = \sqrt{x^2 - R^2} + \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương $\sqrt{x^2 - R^2}$ và $\frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}$ ta có:

$$\sqrt{x^2 - R^2} + \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} \ge 2\sqrt{\sqrt{x^2 - R^2}.\frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}}} = 2R.$$

Khi đó $S_{\Delta MPQ} \ge R.2R = 2R^2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - R^2} = \frac{R^2}{\sqrt{x^2 - R^2}} \Leftrightarrow x^2 - R^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}\ (tm)$.

Vậy diện tích tam giác MPQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2R^2$ khi và chỉ khi M cách tâm O một khoảng bằng $R\sqrt{2}$.

Câu 5 (0,5 điểm)

Cách giải:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=-3x^2-4x\sqrt{y}+16x-2y+12\sqrt{y}+1998.$

Điều kiện: $y\ge 0.$

$$\begin{aligned}P&=-3x^2-4x\sqrt{y}+16x-2y+12\sqrt{y}+1998\\&=\left(-2x^2-4x\sqrt{y}-2y+12x+12\sqrt{y}\right)-x^2+4x+1998\\&=-2\left(x^2+2x\sqrt{y}+y-6x-6\sqrt{y}+9\right)-\left(x^2-4x+4\right)+18+4+1998\\&=-2\left(x+\sqrt{y}-3\right)^2-\left(x-2\right)^2+2020\end{aligned}$$

Vì $\begin{cases}-2\left(x+\sqrt{y}-3\right)^2\le 0\ \forall x,\ y\ge 0\\-\left(x-2\right)^2\le 0\ \forall x\end{cases}\Rightarrow P\le 2020\ \forall x,\ y\ge 0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{y}-3=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\\sqrt{y}=3-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\ (tm)\end{cases}$

Vậy $Max\ P=2020$ khi $x=2$ và $y=1.$

-----HẾT-----