

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm; gồm 15 câu hỏi trắc nghiệm một lựa chọn)

Thí sinh kẻ bảng sau đây vào giấy thi và điền đáp án của câu hỏi vào ô tương ứng.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Đáp án															

Câu 1. Giá trị của biểu thức $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{8}}$ bằng:

- A. 16 B. 8 C. $\sqrt{2}$ D. 4

Câu 2. Giá trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ tại điểm $x = -3$ là:

- A. -3 B. 3 C. 9 D. -9

Câu 3. Biệt thức của phương trình $x^2 - 3x - 1 = 0$ là:

- A. $\Delta = 5$ B. $\Delta = 13$ C. $\Delta = -5$ D. $\Delta = -13$

Câu 4. Phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $S = \{1; 3\}$ B. $S = \{1; -3\}$ C. $S = \{-1; -3\}$ D. $S = \{-1; 3\}$

Câu 5. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 5x + 2$?

- A. $M(5; 2)$ B. $P(2; 0)$ C. $N(1; 7)$ D. $Q\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$

Câu 6. Nếu đường tròn có bán kính bằng 3 thì đường tròn đó có chu vi bằng:

- A. 2π B. 9π C. 6π D. 3π

Câu 7. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ là:

- A. $(2; 3)$ B. $(3; 2)$ C. $(-2; -3)$ D. $(-3; -2)$

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = -x + 1$ B. $y = -2x + 1$ C. $y = -\sqrt{3}x + 2$ D. $y = x + 2$

Câu 9. Một hình nón có bán kính đáy bằng $3(cm)$ và chiều cao bằng $2(cm)$. Thể tích của hình nón bằng:

- A. $12\pi(cm^3)$ B. $6\pi(cm^3)$ C. $2\pi(cm^3)$ D. $18\pi(cm^3)$

Câu 10. Hai đường thẳng $d_1: y = x + 2$ và $d_2: y = ax + 3$ song song với nhau khi

- A. $a \neq 1$ B. $a = 1$ C. $a = -1$ D. $a \neq -1$

Câu 11. Biểu thức $\sqrt{2x - 2}$ có nghĩa khi:

- A. $x \geq 1$ B. $x \leq 1$ C. $x \leq -1$ D. $x \geq -1$

Câu 12. Nếu phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -3$ thì $b + c$ bằng:

- A. -6 B. 5 C. -5 D. 3

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC , $BH = 2cm$, $CH = 3cm$, độ dài của đoạn AH bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{5}cm$ B. $6cm$ C. $1cm$ D. $\sqrt{6}cm$

Câu 14. Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường kính đáy $8(cm)$ và chiều cao $12(cm)$

- A. $96\pi(cm^2)$ B. $128\pi(cm^2)$ C. $48\pi(cm^2)$ D. $192\pi(cm^2)$

Câu 15. (ID: 555540) Mặt cầu (S) có độ dài đường kính bằng d . Diện tích của mặt cầu (S) là:

A. $4\pi d^2$

B. πd^2

C. $2\pi d^2$

D. $\frac{1}{4}\pi d^2$

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm, gồm 5 bài toán)

Bài 1. (1,5 điểm)

a) (ID: 555541) Thực hiện phép tính $A = \sqrt{112} - \sqrt{63}$

b) (ID: 555542) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x+2}} - 2\sqrt{x} \right) : \frac{1}{(\sqrt{x}-2)}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

Bài 2 (1,5 điểm):

a) Vẽ Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ trên trục tọa độ Oxy

b) Tìm tham số m để đường thẳng (d): $y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3. (1,5 điểm)

a) (ID: 555544) Cho phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

b) (ID: 555545) Theo kế hoạch, công an tỉnh Kiên Giang điều 2 tổ công tác đến làm thẻ Căn cước công dân cho một phường trên địa bàn thành phố Rạch Giá. Nếu cả 2 tổ cùng làm thì trong 4 ngày hoàn thành công việc, Nếu mỗi tổ làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ I ít hơn thời gian hoàn thành của tổ II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc?

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O;R) và (O';r) tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M.

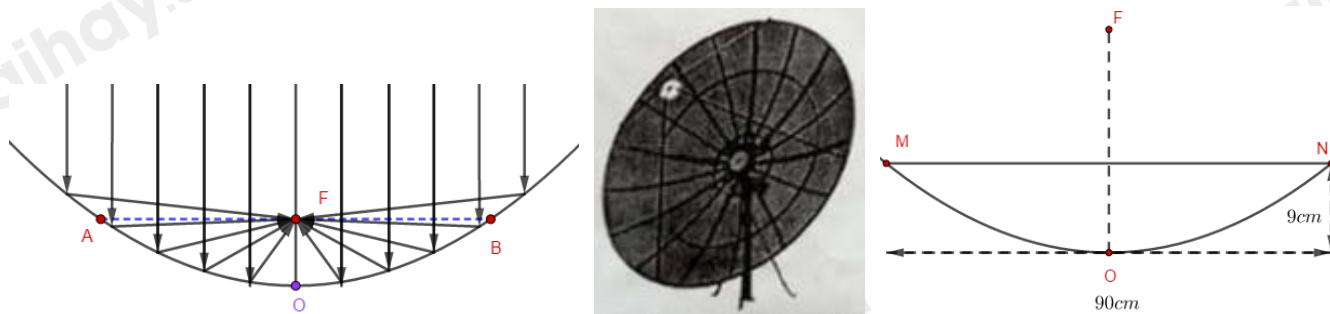
a) Chứng minh OM vuông góc với O'M.

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với O'M. Chứng minh tứ giác OEFO' nội tiếp một đường tròn.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác OEFO', K là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh $OO' = 2IK$.

Bài 5 (1,5 điểm)

Các ăng ten parabol thu sóng hoạt động dựa theo nguyên lý: mọi tia sóng song song với trục của parabol đều có tia phản xạ đi qua tiêu điểm F của parabol (vì vậy nếu ta đặt thiết bị thu sóng tại F thì sẽ thu sóng được tốt nhất). Người ta chứng minh được rằng: Nếu đường thẳng vuông góc với trục của parabol tại F cắt parabol tại 2 điểm A, B thì $OF = \frac{1}{4}AB$ với O là đỉnh của parabol (tham khảo hình vẽ).



Tính độ dài đoạn OF ứng với mô hình trên của một ăng ten parabol (ngang 90cm và cao 9 cm).

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Đáp án	D	B	B	B	C	C	A	B	B	B	A	C	D	A	B

Câu 1**Phương pháp:**

Sử dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$

Cách giải:

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{128}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{128}{8}} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$$

Chọn D.**Câu 2 (NB)****Phương pháp:**Thay $x = -3$ vào hàm số để tính.**Cách giải:**

$$\text{Thay } x = -3 \text{ vào } y = \frac{1}{3}x^2, \text{ ta được: } y = \frac{1}{3} \cdot (-3)^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

Giá trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ tại điểm $x = -3$ là: 3

Chọn B.**Câu 3 (NB)****Phương pháp:**

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có biệt thức là $\Delta = b^2 - 4ac$

Cách giải:

Phương trình: $x^2 - 3x - 1 = 0$ có $a = 1; b = -3; c = -1$

Khi đó, biệt thức $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 9 + 4 = 13$

Chọn B.**Câu 4 (NB)****Phương pháp:**

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$$

Cách giải:

Ta có: $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$, khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = -3$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{1; -3\}$

Chọn B.

Câu 5 (NB)

Phương pháp:

Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị $y = ax + b$ khi $y_0 = ax_0 + b$

Cách giải:

+ Thay $x = 5$ vào $y = 5x + 2$, ta được: $y = 5.5 + 2 = 27 \neq 2$

$\Rightarrow M(5; 2)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = 5x + 2$

+ Thay $x = 2$ vào $y = 5x + 2$, ta được: $y = 5.2 + 2 = 12 \neq 0$

$\Rightarrow P(2; 0)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = 5x + 2$

+ Thay $x = 1$ vào $y = 5x + 2$, ta được: $y = 5.1 + 2 = 7$

$\Rightarrow N(1; 7)$ thuộc đồ thị hàm số $y = 5x + 2$

Chọn C.

Câu 6 (NB)

Phương pháp:

Chu vi đường tròn có bán kính r được tính theo công thức $C = 2\pi r$

Cách giải:

Chu vi đường tròn có bán kính bằng 3 là: $C = 2\pi.3 = 6\pi$

Chọn C.

Câu 7 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng phương pháp cộng đại số, tìm nghiệm của hệ phương trình.

Cách giải:

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2.2 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 3)$

Chọn A.

Câu 8 (NB)

Phương pháp:

Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0$

Cách giải:

Hàm số $y = x + 2$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .

Chọn D.

Câu 9 (NB)

Phương pháp:

Hình nón có bán kính đáy r , đường cao h thì thể tích của hình nón được tính theo công thức $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Cách giải:

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 6\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

Chọn B.

Câu 10 (NB)

Phương pháp:

Hai đường thẳng $(d_1): y = a_1x + b_1$ và $(d_2): y = a_2x + b_2$ song song với nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

Cách giải:

Hai đường thẳng $d_1: y = x + 2$ và $d_2: y = ax + 3$ song song với nhau khi $\begin{cases} a = 1 \\ 3 \neq 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1$

Chọn B.

Câu 11 (NB)

Phương pháp:

Biểu thức $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Cách giải:

Biểu thức $\sqrt{2x-2}$ có nghĩa khi $2x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Chọn A.

Câu 12 (TH)

Phương pháp:

Thay $x = 2; x = -3$ vào phương trình từ đó thu được hệ phương trình, giải hệ phương trình, tính $b + c$

Cách giải:

+ Với $x = 2$, ta có: $2^2 + 2b + c = 0 \Leftrightarrow 2b + c = -4$ (1)

+ Với $x = -3$, ta có: $(-3)^2 + (-3)b + c = 0 \Leftrightarrow 3b - c = 9$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2b + c = -4 \\ 3b - c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 5 \\ c = 3b - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = -6 \end{cases}$

Do đó, $a + b = -5$

Chọn C.**Câu 13 (TH)****Phương pháp:**

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cách giải: ΔABC vuông tại A , đường cao AH , áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$AH^2 = BH.CH$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = 2.3$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = 6$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{6} (cm)$$

$$\text{Vậy } AH = \sqrt{6} cm$$

Chọn D.**Câu 14 (TH)****Phương pháp:**Hình trụ có bán kính đáy r , chiều cao h thì diện tích xung quanh tính theo công thức $2\pi rh$.**Cách giải:**

$$\text{Bán kính đáy của hình trụ là: } r = 8 : 2 = 4 (cm)$$

$$\text{Diện tích xung quanh của hình trụ là: } S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 12 = 96\pi (cm^2)$$

Chọn A.**Câu 15 (TH)****Phương pháp:**Diện tích của mặt cầu có bán kính R được tính theo công thức: $S = 4\pi R^2$ **Cách giải:**

$$\text{Bán kính của mặt cầu là: } R = \frac{d}{2}$$

$$\text{Diện tích của mặt cầu là: } S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d^2$$

Chọn B.

II. TỰ LUẬN

Bài 1 (TH)**Phương pháp:**

$$\text{a) Sử dụng hằng đẳng thức: } \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$$

Thực hiện phép toán với các căn bậc hai

b) Rút gọn các phân thức, thực hiện các phép toán để rút gọn biểu thức.

Cách giải:

a) **Thực hiện phép tính** $A = \sqrt{112} - \sqrt{63}$

$$A = \sqrt{112} - \sqrt{63} = \sqrt{16 \cdot 7} - \sqrt{9 \cdot 7} = 4\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = \sqrt{7}$$

Vậy $A = \sqrt{7}$.

b) **Rút gọn biểu thức** $B = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x+2}} - 2\sqrt{x} \right) : \frac{1}{(\sqrt{x}-2)}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

Với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{x-4}{\sqrt{x+2}} - 2\sqrt{x} \right) : \frac{1}{(\sqrt{x}-2)} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}} - 2\sqrt{x} \right) \cdot (\sqrt{x}-2) \\ &= (\sqrt{x}-2-2\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x}-2) \\ &= (-\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}-2) \\ &= -(\sqrt{x}+2) \cdot (\sqrt{x}-2) \\ &= -(x-4) \\ &= -x+4 \end{aligned}$$

Vậy $B = -x+4$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

Câu 2 (VD)

Phương pháp:

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

- + Nhận xét về hệ số a và sự biến thiên của hàm số
- + Lập bảng giá trị tương ứng của x và y
- + Xác định được các điểm mà đồ thị đi qua, vẽ đồ thị.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là phương trình (*)

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

Cách giải:

a) **Vẽ Parabol (P):** $y = \frac{1}{2}x^2$ trên trục tọa độ Oxy

Ta có: $a = \frac{1}{2} > 0$ nên đồ thị có bề lõm hướng lên trên, đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và nhận trục Oy làm trục đối xứng.

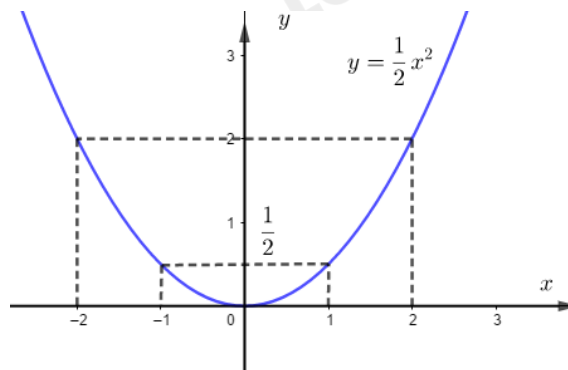
Hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

$\Rightarrow (P): y = \frac{1}{2}x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2; 2); (-1; \frac{1}{2}); (0; 0); (1; \frac{1}{2}); (2; 2)$.

Đồ thị hàm số:



b) Tìm tham số m để đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= 2x + m \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4x + 2m \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2m &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có: $\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-2m) = 4 + 2m$.

Đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow m > -2$$

Vậy $m > -2$ thì đường thẳng $(d): y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 3 (VD)

Phương pháp:

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

Áp dụng hệ thức Vi – ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Biến đổi vế phải của phương trình: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$, sau đó giải phương trình tìm m

b) Gọi thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ I, tổ II lần lượt là x, y ngày (ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$).

Tính được số phân công việc mà mỗi ngày mỗi tổ làm việc.

Lập hệ phương trình, giải hệ phương trình, đối chiếu điều kiện và kết luận.

Cách giải:

a) Cho phương trình $2x^2 + 4x + m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Ta có $\Delta' = 2^2 - 2m = 4 - 2m$.

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Khi đó áp dụng định lý Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 &= 10 \\ \Leftrightarrow (-2)^2 - 2 \cdot \frac{m}{2} &= 10 \\ \Leftrightarrow 4 - m &= 10 \\ \Leftrightarrow m &= 4 - 10 \\ \Leftrightarrow m &= -6 \quad (tm) \end{aligned}$$

Vậy $m = -6$.

b) Theo kế hoạch, công an tỉnh Kiên Giang điều 2 tổ công tác đến làm thẻ Căn cước công dân cho một phường trên địa bàn thành phố Rạch Giá. Nếu cả 2 tổ cùng làm thì trong 4 ngày hoàn thành công việc, Nếu mỗi tổ làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ I ít hơn thời gian hoàn thành của tổ II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi tổ phải làm trong bao nhiêu ngày để hoàn thành công việc?

Gọi thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ I, tổ II lần lượt là x, y ngày (ĐK: $x, y \in \mathbb{N}^*$).

\Rightarrow Mỗi ngày tổ I làm được $\frac{1}{x}$ phần công việc, mỗi ngày tổ II làm được $\frac{1}{y}$ phần công việc.

Vì nếu cả 2 tổ cùng làm thì trong 4 ngày hoàn thành công việc nên ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ (1).

Vì nếu mỗi tổ làm riêng thì thời gian hoàn thành của tổ I ít hơn thời gian hoàn thành của tổ II là 6 ngày nên ta có phương trình $x + 6 = y$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ x + 6 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} \\ x+6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+6+x}{x(x+6)} = \frac{1}{4} \\ x+6 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x+6}{x(x+6)} = \frac{1}{4} \\ x+6 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x+24 = x^2+6x \\ x+6 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-24 = 0 (*) \\ x+6 = y \end{cases}$$

Phương trình (*) có $\Delta' = 1^2 + 24 = 25 = 5^2 > 0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x = 1 + 5 = 6 \text{ (tm)} \\ x = 1 - 5 = -4 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Với $x = 6 \Rightarrow y = x + 6 = 6 + 6 = 12 \text{ (tm)}$.

Vậy thời gian làm riêng hoàn thành công việc của tổ I, tổ II lần lượt là 6 ngày và 12 ngày.

Bài 4 (VD)

Phương pháp:

- a) Sử dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau của đường tròn.
- b) Vận dụng dấu hiệu: Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện là tứ giác nội tiếp.
- c) Gọi N là trung điểm của OO' .

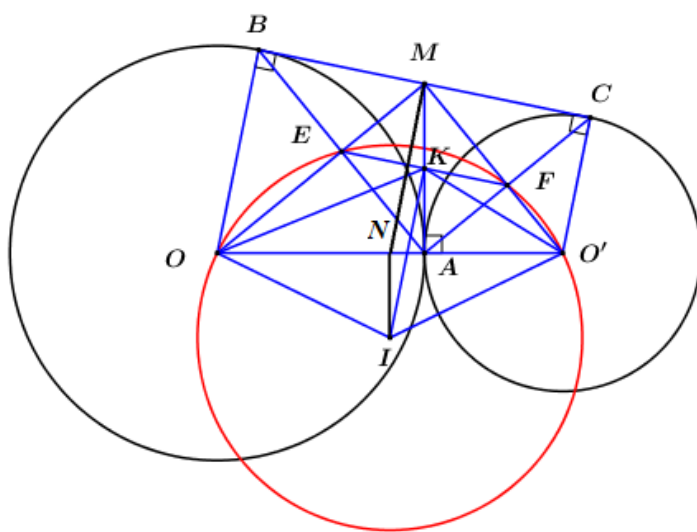
Ta sẽ chứng minh: $MN // IK, MK // IN \Rightarrow MNIK$ là hình bình hành (dnhb) $\Rightarrow MN = IK$ (tính chất hình bình hành).

Mà $OO' = 2MN$

Vậy $OO' = 2IK$ (dpcm)

Cách giải:

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài tại A ($R > r$). Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này (với $B \in (O)$ và $C \in (O')$). Tiếp tuyến chung tại A của hai đường tròn (O) và (O') cắt đoạn thẳng BC tại M .



a) Chứng minh OM vuông góc với $O'M$.

Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau tại có:

MO là tia phân giác của $\angle AMB \Rightarrow \angle OMA = \frac{1}{2} \angle AMB$.

MO' là tia phân giác của $\angle AMC \Rightarrow \angle O'MA = \frac{1}{2} \angle AMC$.

$\Rightarrow \angle OMO' = \angle OAM + \angle O'MA = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle AMC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.

Vậy $OM \perp O'M$.

b) Gọi E là giao điểm của AB với OM và F là giao điểm của AC với $O'M$. Chứng minh tứ giác $OEFO'$ nội tiếp một đường tròn.

Ta có: $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow M$ thuộc trung trực của AB .

$OA = OB (= R) \Rightarrow O$ thuộc trung trực của AB .

$\Rightarrow OM$ là trung trực của AB

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại E .

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $O'M \perp AC$ tại F .

Xét tứ giác $AEMF$ có: $\angle AEM = \angle AFM = \angle EMF = 90^\circ \Rightarrow AEMF$ là hình chữ nhật (dnhb).

$\Rightarrow AEMF$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \angle MFE = \angle MAE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung ME).

Mà $\angle MAE = \angle MOA$ (cùng phụ với $\angle OAE$) $\Rightarrow \angle MFE = \angle MOA$.

$\Rightarrow OEFO'$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện).

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OEFO'$, K là trung điểm của đoạn AM . Chứng minh $OO' = 2IK$.

Gọi N là trung điểm của OO' .

Vì $\triangle OMO'$ vuông tại M ($\angle OMO = 90^\circ$) (cmt) nên $MN = \frac{1}{2} OO' \Rightarrow OO' = 2MN$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền).

Vì $OM, O'M$ lần lượt là trung trực của AB, AC nên E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC .

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\triangle ABC$ (định nghĩa)

$\Rightarrow EF = \frac{1}{2} BC$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Lại có MN là đường trung bình của hình thang $OBCO'$ nên $MN // OB // O'C \Rightarrow MN \perp BC$ (do $OB \perp BC$)

Mà $EF // BC$ (cmt) $\Rightarrow MN \perp EF$ (từ vuông góc đến song song).

Vì K là trung điểm của AM , mà $AEMF$ là hình chữ nhật (cmt) $\Rightarrow K$ cũng là trung điểm của EF .

$\Rightarrow IK \perp EF$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow MN // IK$ (từ vuông góc đến song song). (1)

Ta có:
$$\begin{cases} MK \perp OO' \text{ (do } MA \perp OO') \\ IN \perp OO' \end{cases} \Rightarrow MK \parallel IN \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MNIK$ là hình bình hành (dnhb) $\Rightarrow MN = IK$ (tính chất hình bình hành).

Mà $OO' = 2MN$ (cmt)

Vậy $OO' = 2IK$ (dpcm)

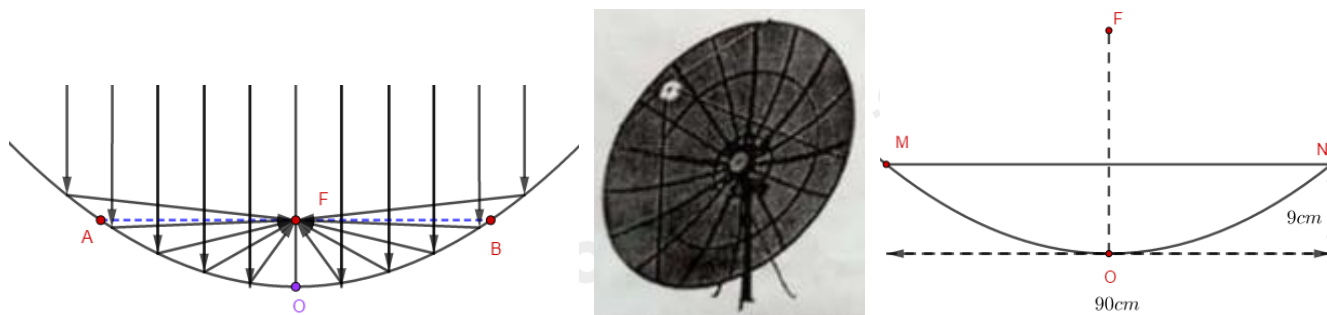
Bài 5 (VDC)

Phương pháp:

Ta gắn trục tọa độ của parabol và các điểm M, N vào hệ trục tọa độ Oxy với Oy là tia OF và Ox là tia thuộc đường thẳng vuông góc với OF tại O để giải bài toán.

Cách giải:

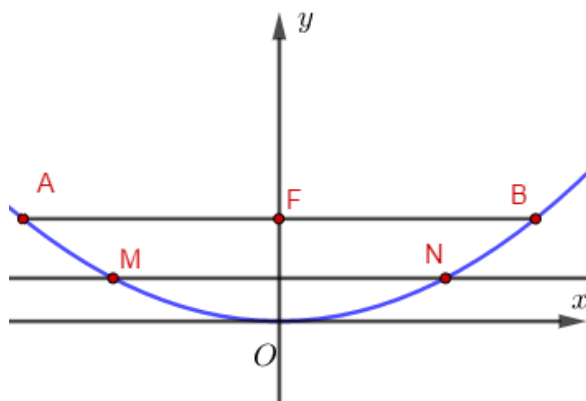
Các ăng ten parabol thu sóng hoạt động dựa theo nguyên lý: mọi tia sóng song song với trục của parabol đều có tia phản xạ đi qua tiêu điểm F của parabol (vì vậy nếu ta đặt thiết bị thu sóng tại F thì sẽ thu sóng được tốt nhất). Người ta chứng minh được rằng: Nếu đường thẳng vuông góc với trục của parabol tại F cắt parabol tại 2 điểm A, B thì $OF = \frac{1}{4} AB$ với O là đỉnh của parabol (tham khảo hình vẽ).



Tính độ dài đoạn OF ứng với mô hình trên của một ăng ten parabol (ngang 90cm và cao 9 cm).

Ta gắn trục tọa độ của parabol và các điểm M, N vào hệ trục tọa độ Oxy với Oy là tia OF và Ox là tia thuộc đường thẳng vuông góc với OF tại O , khi đó parabol đi qua gốc tọa độ và có dạng $y = ax^2$ và hoành độ của

điểm N bằng $\frac{MN}{2}$ hay N có tọa độ là $N(45;9)$,



Parabol đi qua hai điểm M, N nên ta có: $9 = a \cdot 45^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{225}$

$$\Rightarrow \text{Parabol là: } y = \frac{1}{225}x^2.$$

Đường thẳng vuông góc với trục của parabol tại F cắt parabol tại 2 điểm A, B nên hai điểm A và B thuộc parabol.

Gọi tọa độ của F là $F(0; t)$ ($t > 0$), tọa độ của B là $B(x_B, y_B)$.

$$OF = \frac{1}{4}AB \Rightarrow FB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 4OF = 2OF = 2t \Rightarrow x_B = FB = 2t$$

F, A, B cùng thuộc đường thẳng AB và song song với trục hoành nên có tung độ bằng nhau.

$$\Rightarrow y_B = t \Rightarrow B(2t; t).$$

Vì B là điểm thuộc parabol $y = \frac{1}{225}x^2$ nên

$$t = \frac{1}{225} \cdot (2t)^2 \Leftrightarrow 4t^2 = 225t \Leftrightarrow 4t^2 - 225t = 0 \Leftrightarrow t(4t - 225) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 & (\text{ktm}) \\ t = \frac{225}{4} & (\text{tm}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OF = t = \frac{225}{4} = 56,25(\text{cm})$$

Vậy $OF = 56,25\text{cm}$.