ĐỀ THI HỌC KÌ I:

ĐỀ SỐ 15

MÔN: TOÁN - LỚP 8

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Đề bài

Câu 1 (2,5 điểm):

Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x^2}{8-x^3}.\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right):\frac{1}{x^2-4}$

a) Tìm điều kiện của *x* để *P* có nghĩa và rút gọn *P*.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P*.

c) Tìm các số nguyên *x* để $P\vdots\left(x^2+1\right)$.

Câu 2 (2điểm):

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$A(x)=2x^2+x-3$

$B(a;b;c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

Câu 3 (1điểm):

Cho hai đa thức $P(x)=x^3+ax+b$ và $Q(x)=x^2-3x+2$. Xác định các hệ số *a, b* sao cho với mọi giá trị của *x* thì $P(x)\vdots Q(x)$.

Câu 4 (3,5 điểm):

Cho hình thoi *ABCD* có góc *D* bằng 60^o. Gọi *E, H, G, F* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CD* và *DA*.

a) Chứng minh tứ giác *EFGH* là hình chữ nhật.

b) Cho *AG* cắt *HF* tại *J*. Chứng minh rằng $HF=4FJ$.

c) Gọi *I* là trung điểm của *FJ* và *P* là giao điểm của *EH* và *DB*. Chứng minh *IG* vuông góc với *IP*.

d) Cho $AB=2cm$. Tính độ dài *IP*.

Câu 5 (1 điểm):

a) Cho ba số *a, b, c* thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca)=2017$ và $abc=2017$.

Tính giá trị của biểu thức $P=\left(b^2c+2017\right)\left(c^2a+2017\right)\left(a^2b+2017\right)$.

b) (Dành riêng cho lớp 8A) Tìm các số tự nhiên *x, n* sao cho số $p=x^4+2^{4n+2}$ là một số nguyên tố.

LG bài 1

Giải chi tiết:

a) Tìm điều kiện của *x* để *P* có nghĩa và rút gọn *P*.

ĐKXĐ: $\begin{cases} x-2\ne 0 \\ 8-x^3\ne 0 \\ x+2\ne 0 \\ x^2-4\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ne \pm 2$

$$\begin{aligned} P&=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x^2}{8-x^3}.\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right):\frac{1}{x^2-4} \\ &=\left(\frac{1}{x-2}+\frac{x^2}{x^3-8}.\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right):\frac{1}{x^2-4} \\ &=\left(\frac{1}{x-2}+\frac{x^2}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}.\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right):\frac{1}{x^2-4} \end{aligned}$$

$$P=x^2+x+2=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} &=\left(\frac{1}{x-2}+\frac{x^2}{(x-2)(x+2)}\right).\left(x^2-4\right) \\ &=\frac{x+2+x^2}{x^2-4}.\left(x^2-4\right)=x^2+x+2. \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức *P*.

$$P=x^2+x+2=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{7}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\ge \frac{7}{4}\text{với mọi } x\ne \pm 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Vậy $\min_P=\frac{7}{4}$ đạt được khi $x=-\frac{1}{2}$

c) Tìm các số nguyên *x* để $P\vdots\left(x^2+1\right)$.

Để $P\vdots\left(x^2+1\right)$ thì phép chia trên phải có số dư là 0 $\Rightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Vậy $x=-1$.

LG bài 2

Giải chi tiết:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$A(x)=2x^2+x-3=2x^2+3x-2x-3=x(2x+3)-(2x+3)=(2x+3)(x-1)$

$$\begin{aligned}&B(a;b;c)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc\\&=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc+abc\\&=(a^2b+abc+a^2c)+(ab^2+b^2c+abc)+(abc+bc^2+ac^2)\\&=a(ab+bc+ca)+b(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)\\&=(a+b+c)(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

LG bài 3

Giải chi tiết:

Cho hai đa thức $P(x)=x^3+ax+b$ và $Q(x)=x^2-3x+2$. Xác định các hệ số *a, b* sao cho với mọi giá trị của *x* thì $P(x)\vdots Q(x)$.

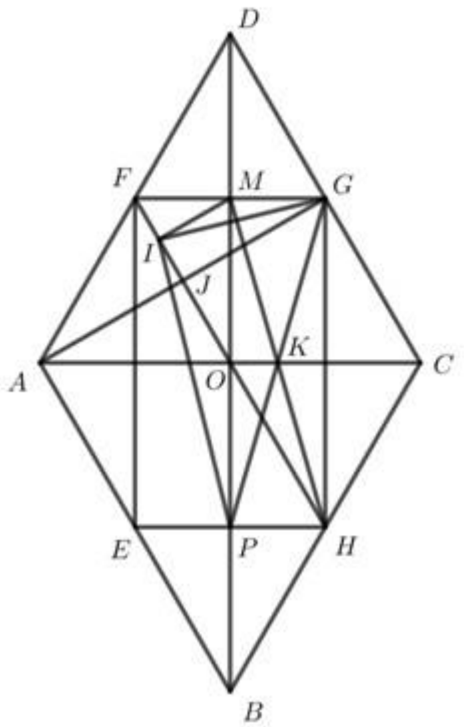
Để $P(x)\vdots Q(x)$ với mọi giá trị của $x \Leftrightarrow (a+7)x+b-6=0$ với mọi giá trị của x

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a+7=0\\b-6=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-7\\b=6\end{cases}$$

Vậy với $a=-7$ và $b=6$ thì $P(x)\vdots Q(x)$ với mọi giá trị của *x*.

LG bài 4

Giải chi tiết:



Cho hình thoi *ABCD* có góc *D* bằng 60^o . Gọi *E, H, G, F* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CD* và *DA*.

a) Chứng minh tứ giác *EFGH* là hình chữ nhật.

Ta có *ABCD* là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$ (tính chất) (1)

Có *E, F* lần lượt là trung điểm của *AB* và *DA* (gt)

$\Rightarrow$ *EF* là đường trung bình trong tam giác *ABD* $\Rightarrow EF // BD$ (2)

Có *F, G* lần lượt là trung điểm của *AD* và *CD* (gt)

$\Rightarrow$ *FG* là đường trung bình trong tam giác *DAC* $\Rightarrow FG // AC$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow EF \perp FG$ (từ vuông góc đến song song)

Tương tự $\Rightarrow FG \perp GH ; GH \perp HE ; HE \perp EF$

$\Rightarrow$ *EFGH* là hình chữ nhật (dhnb)

b) Cho *AG* cắt *HF* tại *J*. Chứng minh rằng $HF = 4FJ$.

Ta có *F, H* lần lượt là trung điểm của *AD* và *BC*

$\Rightarrow$ *FH* là đường trung bình của hình thoi *ABCD* $\Rightarrow FH // AB // CD$ và $FH = AB = CD$

Xét tam giác *ADG* có *F* là trung điểm của *AD*, *FJ // DG* (*FH // CD*)

$\Rightarrow$ *J* là trung điểm của *AG* $\Rightarrow$ *FJ* là đường trung bình trong tam giác *ADG*

$\Rightarrow FJ = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{4}CD = \frac{1}{4}HF$ (do *G* là trung điểm của *CD* nên $DG = \frac{1}{2}CD$)

$\Rightarrow HF = 4FJ$ (đpcm)

c) Gọi *I* là trung điểm của *FJ* và *P* là giao điểm của *EH* và *DH*. Chứng minh *IG* vuông góc với *IP*.

Gọi *AC* cắt *BD* tại *O* $\Rightarrow DO = \frac{1}{2}BD; OC = OA = \frac{1}{2}AC$ (tính chất)

Xét tam giác *ACD* có $DA = DC$ (*ABCD* là hình thoi), $\angle D = 60^o$ (gt)

$\Rightarrow \Delta ACD$ đều (dhnb) $\Rightarrow AC = CD$; $DO = AG$ (tính chất)

$\Rightarrow AG$ vừa là trung tuyến vừa là đường cao $\Rightarrow AG \perp CD \Rightarrow AG \perp HF$ (từ vuông góc đến song song)

Gọi *FG* cắt *BD* tại *M*

Xét tam giác *ODA* có *F* là trung điểm của *AD*, *FM // OA* (*FG // AC*)

$\Rightarrow M$ là trung điểm của *OD* $\Rightarrow FM$ là đường trung bình trong tam giác *ODA* $\Rightarrow FM = \frac{1}{2}OA$

Tương tự ta cũng được $GM = \frac{1}{2}OC$ mà $OA = OC$ (cmt) $\Rightarrow FM = GM$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của *FG*

$\Rightarrow IM$ là đường trung bình trong tam giác *FJG*

$\Rightarrow IM // AG$ mà $AG \perp HF$ (cmt) $\Rightarrow IM \perp HF$

Gọi *PG* cắt *MH* tại *K*.

Dễ thấy *PHGM* là hình chữ nhật (có 3 góc vuông)

$\Rightarrow K$ là trung điểm của *PG* và *HM* ; $HM = PG$

Có tam giác *IMH* vuông tại *I* ($IM \perp HF$) có *K* là trung điểm của *HM*

$\Rightarrow KI = \frac{1}{2}HM = \frac{1}{2}PG$

$\Rightarrow$ Tam giác *PIG* vuông tại $I \Rightarrow IG \perp IP$ (đpcm)

d) Cho $AB = 2cm$. Tính độ dài *IP*.

Ta có *ABCD* là hình thoi có *HF* là đường trung bình và ΔACD đều

$\Rightarrow AB = BC = CD = DA = AC = HF = 2cm$

$\Rightarrow AG = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}cm \Rightarrow GJ = \frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{3}}{2}cm$ (*J* là trung điểm của *AG*)

$OC = OA = \frac{1}{2}AC = 1cm$; $FG = EH = \frac{1}{2}AC = 1cm$

$OD = AG = \sqrt{3}cm \Rightarrow EF = GH = OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{3}cm$

$IJ = \frac{1}{2}FJ = \frac{1}{8}HF = \frac{1}{4}cm$; $PH = MG = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}cm$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác GJI vuông tại Jta được:

$$IG = \sqrt{IJ^2 + GJ^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{4}(cm)$$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác HPG vuông tại H ta được:

$$PG = \sqrt{PH^2 + GH^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{\sqrt{13}}{2}(cm)$$

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác PIG vuông tại I ta được:

$$IP = \sqrt{PG^2 - IG^2} = \sqrt{\frac{13}{4} - \frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{39}}{4}(cm)$$

LG bài 5

Giải chi tiết:

a) Cho ba số *a, b, c* thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca) = 2017$ **và** $abc = 2017$ **.**

Tính giá trị của biểu thức $P = (b^2c + 2017)(c^2a + 2017)(a^2b + 2017)$.

Theo câu 2 ta có $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 2017 - 2017 = 0$$

$$\begin{aligned} P &= (b^2c + 2017)(c^2a + 2017)(a^2b + 2017) \\ &= (b^2c + abc)(c^2a + abc)(a^2b + abc) \\ &= bc(c+a)\,ca(c+b)\,ab(a+c) \\ &= a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a) = 0. \end{aligned}$$

b) (Dành riêng cho lớp 8A) Tìm các số tự nhiên *x, n* sao cho số $p = x^4 + 2^{4n+2}$ là một số nguyên tố.

$$\begin{aligned} p = x^4 + 2^{4n+2} &= (x^2)^2 + 2.x^2.2^{2n+1} + (2^{2n+1})^2 - 2.x^2.2^{2n+1} \\ &= (x^2 + 2^{2n+1})^2 - x^2.2^{2n+2} \\ &= (x^2 + 2^{2n+1} - x.2^{n+1})(x^2 + 2^{2n+1} + x.2^{n+1}). \end{aligned}$$

Với mọi số tự nhiên $x, n \Rightarrow 2^{2n+1} \geq 2^1 = 2 \Rightarrow x^2 + 2^{2n+1} + x.2^{n+1} \geq 2$

Với mọi số tự nhiên $x, n \Rightarrow 2^{2n} \ge 1 \Rightarrow x^2 + 2^{2n+1} - x.2^{n+1} = x^2 - 2x.2^n + 2^{2n} + 2^{2n} = \left(x - 2^n\right)^2 + 2^{2n} \ge 1$

Để p là một số nguyên tố $\begin{cases} x^2 + 2^{2n+1} - x.2^{n+1} = 1 \\ x^2 + 2^{2n+1} + x.2^{n+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2n+1} = 2 \\ x - 2^n = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+1=1 \\ x = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ x = 2^0 = 1 \end{cases}.$

Vậy với $n=0$ và $x=1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.