ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ I – Đề số 2

Môn: Toán - Lớp 11

Bộ sách Cánh diều

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAHAY.COM

Phần trắc nghiệm (5 điểm)

Câu 1: B	Câu 2: C	Câu 3: D	Câu 4: A	Câu 5: A
Câu 6: B	Câu 7: D	Câu 8: C	Câu 9: D	Câu 10: D
Câu 11: A	Câu 12: B	Câu 13: C	Câu 14: A	Câu 15: C
Câu 16: B	Câu 17: B	Câu 18: A	Câu 19: D	Câu 20: A

Câu 1: Cho góc lượng giác (Ov, Ow) có số đo là $\frac{4\pi}{5}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{7\pi}{5}$. Số đo góc lượng giác (Ou, Ov) là:

A. $\frac{\pi}{5}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

B. $\frac{3\pi}{5}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

C. $\frac{-\pi}{5}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

D. Cả A, B, C đều sai

Phương pháp

Sử dụng hệ thức Chasles: Với ba tia tùy ý Ou, Ov, Ow, ta có:

$$\left(Ou,Ov\right)+\left(Ov,Ow\right)=\left(Ou,Ow\right)+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Lời giải

Theo hệ thức Chasles ta có: $\left(Ou,Ov\right)=\left(Ou,Ow\right)-\left(Ov,Ow\right)+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)=\frac{7\pi}{5}-\frac{4\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Đáp án B

Câu 2: Cho $\cos x=\frac{-1}{3}$ với $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Chọn đáp án đúng:

A. $\sin x+\cos x=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}$

B. $\sin x+\cos x=\frac{2\sqrt{3}+1}{3}$

C. $\sin x+\cos x=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

D. $\sin x+\cos x=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ nên $\sin x>0$

Ta có: $\cos^2 x+\sin^2 x=1\Rightarrow \sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Do đó, $\sin x+\cos x=\frac{-1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

Đáp án C

Câu 3: Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{4}$. Khi đó:

A. $\sin 2\alpha=\frac{15}{16}$

B. $\sin 2\alpha=-\frac{9}{16}$

C. $\sin 2\alpha=\frac{9}{16}$

D. $\sin 2\alpha=-\frac{15}{16}$

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

Lời giải

Ta có: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{4}\Rightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{16}\Rightarrow\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{16}$

$\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{1}{16}-\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{16}-1=\frac{-15}{16}$

Đáp án D

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ với tập xác định là D, hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nếu:

A. $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$

B. $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$

C. $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=-2f(x)$

D. $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=-\frac{1}{2}f(x)$

Phương pháp

Cho hàm số $y=f(x)$ với tập xác định là D, hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nếu $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và

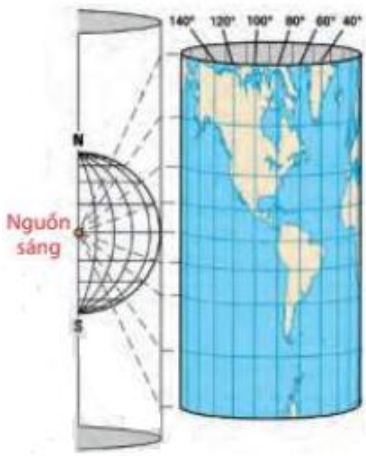
$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

Lời giải

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ với tập xác định là D, hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn nếu $\forall x\in D$ nếu $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

Đáp án A

Câu 5: Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình vẽ. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0^0 làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi^0\left(-90<\varphi<90\right)$ được cho bởi hàm số $y=20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)(cm)$.



Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20cm trên bản đồ.

A. vĩ độ -45^0 đến 45^0

B. vĩ độ 45^0 đến 90^0

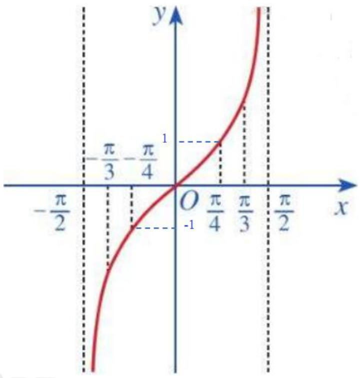
C. vĩ độ -60^0 đến 60^0

D. vĩ độ -30^0 đến 30^0

Phương pháp

Sử dụng kiến thức về đồ thị hàm số $y=\tan x$

Lời giải



Vì điểm nằm cách xích đạo không quá 20cm trên bản đồ nên ta có: $-20\le y\le 20$

Khi đó $-20\le 20\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)\le 20$ hay $-1\le\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)\le 1$

Ta có: $-90<\varphi<90$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{180}\varphi<\dfrac{\pi}{2}$

Xét đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$:

Ta thấy $-1\le\tan\left(\dfrac{\pi}{180}\varphi\right)\le 1$ khi và chỉ khi $-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{180}\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$ hay $-45<\varphi<45$. Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20cm nằm ở vĩ độ -45^0 đến 45^0.

Đáp án A

Câu 6: Sử dụng máy tính cầm tay để giải phương trình $\tan x-6=0$ với kết quả là radian (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn) là:

A. $x\approx \pm 1,405+k\pi ,k\in \mathbb{Z}$

B. $x\approx 1,406+k\pi ,k\in \mathbb{Z}$

C. $x\approx \pm 1,405+k2\pi ,k\in \mathbb{Z}$

D. $x\approx 1,406+k2\pi ,k\in \mathbb{Z}$

Phương pháp

Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của phương trình gần đúng của phương trình.

Phương trình $\tan \alpha =\tan m$ có nghiệm là $\alpha =m+k\pi ,k\in \mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có: $\tan x-6=0\Leftrightarrow \tan x=6$

Sau khi chuyển máy tính sang chế độ "radian". Bấm liên tiếp:

SHIFT	tan	6	=

Ta được kết quả gần đúng là 1,406.

Vậy phương trình $\tan x-6=0$ có các nghiệm là $x\approx 1,406+k\pi ,k\in \mathbb{Z}$

Đáp án B

Câu 7: Có bao nhiêu số nguyên m sao cho phương trình $2{{\sin }^{2}}x-\sin x\cos x-{{\cos }^{2}}x=m$ có nghiệm?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Phương pháp

Sử dụng kiến thức: Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm khi ${{c}^{2}}\le {{a}^{2}}+{{b}^{2}}$

Lời giải

$$2{{\sin }^{2}}x-\sin x\cos x-{{\cos }^{2}}x=m\Leftrightarrow 2.\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x \right)=m$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+3\cos 2x=-2m+1\ (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi: ${{\left(1-2m \right)}^{2}}\le 1+9\Leftrightarrow 4{{m}^{2}}-4m-9\le 0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{10}}{2}\le m\le \frac{1+\sqrt{10}}{2}$

Mà m là số nguyên nên $m\in \left\{ -1;0;1;2 \right\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn bài toán

Đáp án D

Câu 8: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{4};\frac{1}{{{4}^{2}}};\frac{1}{{{4}^{3}}};\frac{1}{{{4}^{4}}};\frac{1}{{{4}^{5}}};...$ Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{1}{4^{n+2}}$

B. $u_n = \frac{1}{4^{n+1}}$

C. $u_n = \frac{1}{4^n}$

D. $u_n = \frac{1}{4^{n-1}}$

Phương pháp

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số số (u_n) cho bằng cách liệt kê: Biến đổi một vài số hạng của dãy số sao cho các số đó có chung một quy luật. Từ đó dự đoán công thức của (u_n) theo n để tìm được công thức của số hạng tổng quát.

Lời giải

$u_1 = \frac{1}{4^1}; u_2 = \frac{1}{4^2}; u_3 = \frac{1}{4^3}; u_4 = \frac{1}{4^4}; u_5 = \frac{1}{4^5}; ...$ nên ta dự đoán số hạng tổng quát của dãy số là $u_n = \frac{1}{4^n}$

Đáp án C

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+3}{n+1}$. Với giá trị nào của a thì (u_n) là dãy số tăng?

A. $a = 3$

B. $a < 3$

C. $a < 4$

D. $a > 3$

Phương pháp

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{(n+1)a+3}{n+1+1} = \frac{na+a+3}{n+2}$

Xét: $u_{n+1} - u_n = \frac{na+a+3}{n+2} - \frac{na+3}{n+1} = \frac{(na+a+3)(n+1)-(na+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$= \frac{n^2a+na+3n+na+a+3-n^2a-3n-2na-6}{(n+1)(n+2)} = \frac{a-3}{(n+1)(n+2)}$

Để (u_n) là dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tức là $\frac{a-3}{(n+1)(n+2)} > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Mà $(n+1)(n+2) > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên $\frac{a-3}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow a-3 > 0 \Leftrightarrow a > 3$

Vậy (u_n) là dãy số tăng khi $a > 3$

Đáp án D

Câu 10: Trong các dãy số sau, dãy nào **không** là cấp số cộng?

A. $3;1;-1;-3;-5$

B. $5;2;-1;-4;-7$

C. $2;4;6;8;10$

D. $1;2;3;5;8$

Phương pháp

Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d, tức là: $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \ge 2$

Lời giải

Xét dãy số: $1;2;3;5;8$ ta thấy, $2 = 1+1, 3 = 2+1, 5 = 3+2$ nên dãy số $1;2;3;5;8$ không phải cấp số cộng

Các dãy số còn lại, kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi nên các dãy số là cấp số cộng.

Đáp án D

Câu 11: Cho cấp số cộng có $u_2 = 2017, u_5 = 1945$. Số hạng tổng quát của cấp số cộng này là:

A. $u_n = -24n + 2065$

B. $u_n = 24n - 2065$

C. $u_n = -12n + 2065$

D. $u_n = 12n - 2065$

Phương pháp

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức: $u_n = u_1 + (n-1)d$

Lời giải

$$\begin{cases} u_2 = 2017 \\ u_5 = 1945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 2017 \\ u_1 + 4d = 1945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3d = -72 \\ u_1 + d = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -24 \\ u_1 = 2041 \end{cases}$$

Do đó, $u_n = 2041 + (n-1)(-24) = -24n + 2065$

Đáp án A

Câu 12: Sinh nhật lần thứ 20 của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2018 dương lịch. An muốn mua một món quà để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định nuôi lợn đất. An bắt đầu bỏ vào lợn 1 000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2018. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau An bỏ tiền vào lợn đất nhiều hơn ngày trước đó 2 000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật mình, An có bao nhiêu tiền để mua quà (ngày nuôi lợn đất tính từ ngày 01 tháng 02 năm 2018 đến hết ngày 30 tháng 04 năm 2018)?

A. 7 925 000 đồng

B. 7 921 000 đồng

C. 7 920 000 đồng

D. 6 920 000 đồng

Phương pháp

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.

Khi đó: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}$

Lời giải

Số tiền nuôi lợn của An mỗi ngày lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1\,000$, công sai $d = 2\,000$.

Cấp số cộng này gồm có 89 số hạng.

Tổng số tiền An nhét vào lợn đất là: $S = \frac{[2.1\,000 + (89-1)2\,000]89}{2} = 7\,921\,000$ (đồng)

Đáp án B

Câu 13: Dãy số (u_n) nào sau đây là dãy số giảm?

A. $1; 2; 3; 4; 5; ...$

B. $1; -1; 2; -2; ...$

C. $-1; -2; -3; -4; -5; ...$

D. Cả A, B, C đều sai

Phương pháp

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Vì $-5 < -4 < -3 < -2 < -1$ nên dãy số $-1; -2; -3; -4; -5; ...$ là dãy số giảm

Đáp án C

Câu 14: Hình chóp tứ giác thì có mặt bên là hình gì?

A. Hình tam giác

B. Hình tứ giác

C. Hình ngũ giác

D. Cả A, B, C đều sai

Phương pháp

Trong hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là các mặt bên.

Lời giải

Hình chóp tứ giác thì có mặt bên là hình tam giác.

Đáp án A

Câu 15: Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O, ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

A. 1 mặt phẳng

B. 2 mặt phẳng

C. 3 mặt phẳng

D. 4 mặt phẳng

Phương pháp

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Lời giải

Ta xác định được 3 mặt phẳng là: mp (a, b), mp (b, c), mp (c, a). Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán

Đáp án C

Câu 16: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Gọi P là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AP = 2DP$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) là:

A. EF, với E là giao điểm của MN và BD, F là giao điểm của MP và CD

B. EF, với E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của NP và CD

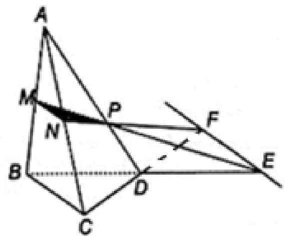
C. CE, với E là giao điểm của MP và BD

D. Cả A, B, C đều sai.

Phương pháp

Nếu hai mặt phân biệt (P) và (Q) có điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất d chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng d đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABD), gọi E là giao điểm của MP và BD. Khi đó, $E \in (MNP) \cap (BCD)$

Trong mặt phẳng (ACD), gọi F là giao điểm của NP và CD. Khi đó, $F \in (MNP) \cap (BCD)$

Vậy EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (BCD)

Đáp án B

Câu 17: Hai đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung thì hai đường thẳng đó:

A. Chéo nhau

B. Song song

C. Cắt nhau

D. Trùng nhau

Phương pháp

Hai đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

Lời giải

Hai đường thẳng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

Đáp án B

Câu 18: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành ABCD và ABEF. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Tứ giác CEFD là hình bình hành

B. Tứ giác CEFD là hình thoi

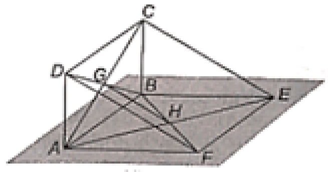
C. Tứ giác CEFD là hình chữ nhật

D. Tứ giác CEFD là hình vuông

Phương pháp

Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Lời giải



Vì G, H lần lượt là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành ABCD và ABEF nên G là trung điểm của AC và BD; H là trung điểm của AE và BF.

Tam giác ACE có G, H lần lượt là trung điểm của AC và AE nên GH là đường trung bình của tam giác ACE. Do đó, GH//CE và $GH = \frac{1}{2}CE$.

Tam giác BDF có G, H lần lượt là trung điểm của BD và BF nên GH là đường trung bình của tam giác BDF. Do đó, GH//DF, $GH = \frac{1}{2}DF$.

Suy ra, CE//DF, $CE = DF$. Vậy tứ giác CEFD là hình bình hành.

Đáp án A

Câu 19: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD. I là giao điểm của MN và PQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MI = \frac{2}{3}MN$

B. $MI = \frac{1}{3}MN$

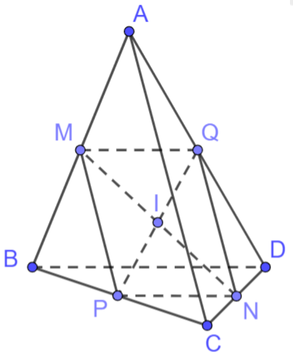
C. $MI = \frac{2}{3}MN$

D. $MI = \frac{1}{2}MN$

Phương pháp

Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Lời giải



Vì M, P lần lượt là trung điểm của AB, BC nên MP là đường trung bình của tam giác ABC. Do đó, MP//AC, $MP = \frac{1}{2}AC$

Vì N, Q lần lượt là trung điểm của CD, AD nên NQ là đường trung bình của tam giác ADC. Do đó, $NQ//AC,\ NQ = \frac{1}{2}AC$

Do đó, $MP//NQ,\ MP = NQ$, suy ra tứ giác MPNQ là hình bình hành. Vậy $MI = \frac{1}{2}MN$

Đáp án D

Câu 20: Cho tam giác ABC cân tại A. Biết độ dài cạnh đáy BC, đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $q^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

B. $q^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

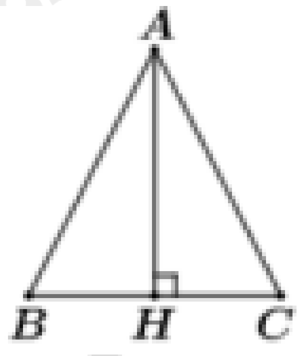
C. $q^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$

D. $q^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$

Phương pháp

Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng ngay đứng trước nó với một số không đổi q, tức là $u_n = u_{n-1}.q$, với $n \ge 2$

Lời giải



Vì BC, AH, AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân nên ta có: $AH = BC.q, AB = AH.q = BC.q^2$, suy ra

$$\begin{cases} AH^2 = BC.AB \\ \dfrac{AB}{BC} = q^2 \end{cases}$$

Vì tam giác ABC cân tại A nên AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến nên $BH = \dfrac{BC}{2}$

Áp định lí Pythagore vào tam giác ABH vuông tại H có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = AB^2 - \frac{BC^2}{4} \Rightarrow 4\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 4\frac{AB}{BC} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \text{ (do } \frac{AB}{BC} > 0\text{)}$$

Vậy $q^2 = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

Đáp án A

Phần tự luận (5 điểm)

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Giải các phương trình sau:

a) $\cot\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

b) $\sin x + \sin 2x = 0$

2) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + 2\sin^2 x - 3\cos^2 x$

3) Cho phương trình: $(1-m)\tan^2 x - \dfrac{2}{\cos x} + 1 + 3m = 0$. Tìm m để phương trình có nhiều hơn một nghiệm trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Phương pháp

a) Gọi α là số thực thuộc khoảng $(0;\pi)$ sao cho $\cot\alpha = m$. Khi đó, với mọi $m \in \mathbb{R}$, ta có:

$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

2) Sử dụng kiến thức $-1 \le \sin x \le 1$

3) Sử dụng kiến thức: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

1)

a) $\cot\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình đã cho có họ nghiệm là: $x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

b) $\sin x+\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{3x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{3x}{2}=k\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2k\pi}{3}\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình đã cho có họ nghiệm là: $x=\frac{2k\pi}{3};x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

2) Ta có: $y=1+2\sin^2 x-3\cos^2 x=1+2\sin^2 x-3\left(1-\sin^2 x\right)=-2+5\sin^2 x$

Vì $0\le\sin^2 x\le 1\,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -2\le -2+5\sin^2 x\le 3\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó:

+ Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, đạt được khi $\sin^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

+ Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -2, đạt được khi $\sin^2 x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$

3) Điều kiện: $\cos x\ne 0\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\left(1-m\right)\tan^2 x-\frac{2}{\cos x}+1+3m=0\Leftrightarrow\left(1-m\right)\sin^2 x-2\cos x+\left(1+3m\right)\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 1-m-\cos^2 x+m\cos^2 x-2\cos x+\cos^2 x+3m\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 4m\cos^2 x-2\cos x+1-m=0\Leftrightarrow m\left(4\cos^2 x-1\right)-\left(2\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2\cos x-1\right)\left(2m\cos x+m-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ 2m\cos x=1-m\end{array}\right.$

Xét $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$, do $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên ta có một nghiệm là $x=\frac{\pi}{3}$

Do đó, để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $2m\cos x=1-m$ phải có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Điều này xảy ra khi $m\ne 0$ và $\cos x=\frac{1-m}{2m}\in\left(0;1\right)\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\ 0<\frac{1-m}{2m}<1\\ \frac{1-m}{2m}\ne\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ne 0\\ \frac{1}{3}<m<1\\ m\ne\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\left(\frac{1}{3};1\right)\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đó.

b) Cho dãy số có các số hạng đầu là 4; 8; 12; 16; 20; 24;… Tìm số hạng tổng quát của dãy số đó.

Phương pháp

a) Nếu một cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + \left(n-1\right)d, n \ge 2$

b) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số số $\left(u_n\right)$ cho bởi hệ thức truy hồi: Tính một vài số hạng đầu của dãy số. Từ đó dự đoán công thức của $\left(u_n\right)$ theo n để tìm được công thức của số hạng tổng quát.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = -1 \Rightarrow u_1 + d + u_1 + 2d = -1 - \frac{1}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow 2.\frac{1}{3} + 3d = \frac{-4}{3} \Rightarrow d = \frac{-2}{3}$

Do đó, số hạng tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = \frac{1}{3} + \left(n-1\right)\left(\frac{-2}{3}\right) = -\frac{2}{3}n + 1$

b) Ta có: $u_1 = 4 = 4.1, u_2 = 8 = 4.2, u_3 = 12 = 4.3, u_4 = 16 = 4.4, u_5 = 20 = 4.5, u_6 = 24 = 4.6$

Vậy công thức của số hạng tổng quát là: $u_n = 4n$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho hình chóp S. ABCD. Gọi O là một điểm nằm trong tam giác SCD. Xác định giao điểm của đường thẳng BO và mặt phẳng (SAC).

Phương pháp

Cách tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$:

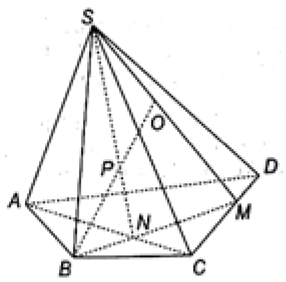
Trường hợp 1: $\left(\alpha\right)$ chứa đường thẳng d’ và d’ cắt đường thẳng d tại I. Khi đó, $I = d \cap d' \Rightarrow I = d \cap \left(\alpha\right)$

Trường hợp 2: $\left(\alpha\right)$ không chứa đường thẳng nào cắt d.

+ Tìm mặt phẳng $\left(\beta\right)$ chứa d và $\left(\alpha\right) \cap \left(\beta\right) = d'$

+ Tìm $I = d \cap d'$. Khi đó, $I = d \cap \left(\alpha\right)$

Lời giải



Trong mặt phẳng (SCD), gọi M là giao điểm của SO và CD.

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi N là giao điểm của BM và AC.

Khi đó, N thuộc mặt phẳng SBO.

Trong mặt phẳng (SBO), gọi P là giao điểm của SN và BO.

Vì P thuộc BO và $P \in SN \subset (SAC)$

Do đó, P là giao điểm của BO và mặt phẳng (SAC).

Bài 4. (1,0 điểm) Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng cắt bốn cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm M, N, P, Q.

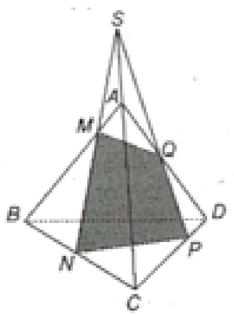
a) Chứng minh rằng các đường thẳng MN, PQ, AC đôi một song song hoặc đồng quy.

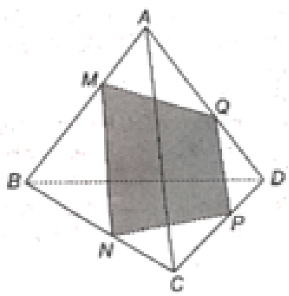
b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP, BD đôi một song song hoặc đồng quy.

Phương pháp

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Lời giải





a) Ta có: $(ABC) \cap (ACD) = AC, (ABC) \cap (MNPQ) = MN, (ACD) \cap (MNPQ) = PQ$

Khi đó, ba mặt phẳng (ABC), (ACD), (MNPQ) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến AC, MN, PQ. Áp dụng định lí về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng trên, suy ra ba đường thẳng MN, PQ, AC đôi một song song hoặc đồng quy.

b) Ta có: $(ABD) \cap (BCD) = BD, (ABD) \cap (MNPQ) = MQ, (BCD) \cap (MNPQ) = NP$

Khi đó, ba mặt phẳng (ABD), (BCD), (MNPQ) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến BD, NP, MQ. Áp dụng định lí về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng trên, suy ra ba đường thẳng MQ, NP, BD đôi một song song hoặc đồng quy.