ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ I – Đề số 5

Môn: Toán - Lớp 11

Bộ sách Cánh diều + Chân trời sáng tạo

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần trắc nghiệm (5 điểm)

Câu 1: C	Câu 2: A	Câu 3: B	Câu 4: C	Câu 5: C
Câu 6: A	Câu 7: B	Câu 8: B	Câu 9: C	Câu 10: D
Câu 11: C	Câu 12: D	Câu 13: B	Câu 14: C	Câu 15: B
Câu 16: D	Câu 17: C	Câu 18: C	Câu 19: C	Câu 20: A

Câu 1: Góc lượng giác nào dưới đây tương ứng với chuyển động quay $2\frac{1}{5}$ vòng theo chiều kim đồng hồ?

A. -792^0

B. $-\frac{22\pi}{5}rad$

C. Cả A và B đều đúng

D. Cả A và B đều sai.

Phương pháp

Một vòng quay của kim đồng hồ ứng với 360 độ, $1^0=\frac{\pi}{180}$ rad và $1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$.

Quy ước chiều quay ngược với chiều kim đồng hồ là chiều dương.

Lời giải

$2\frac{1}{5}$ vòng đường tròn ứng với: $2\frac{1}{5}.360^0=792^0=\frac{22\pi}{5}rad$

Do đó, góc giác tương ứng với chuyển động quay $2\frac{1}{5}$ vòng theo chiều kim đồng hồ là -792^0 hay $-\frac{22\pi}{5}rad$.

Đáp án C

Câu 2: Cho góc α thỏa mãn $3\cos\alpha+2\sin\alpha=2$ và $\sin\alpha<0$. Chọn đáp án đúng:

A. $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{13}$.

B. $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{7}{13}$.

C. $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{8}{13}$.

D. $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{8}{13}$.

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Lời giải

Ta có: $3\cos\alpha+2\sin\alpha=2\Leftrightarrow\left(3\cos\alpha+2\sin\alpha\right)^2=4$

$\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha+12\cos\alpha.\sin\alpha+4\sin^2\alpha=4$

$\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha+12\cos\alpha.\sin\alpha+4\left(1-\cos^2\alpha\right)=4$

$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha+12\cos\alpha.\sin\alpha=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\left(5\cos\alpha+12\sin\alpha\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\5\cos\alpha+12\sin\alpha=0\end{array}\right.$.

+) $\cos\alpha=0\Rightarrow\sin\alpha=1$: loại (vì $\sin\alpha<0$).

+) $5\cos\alpha+12\sin\alpha=0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases}5\cos\alpha+12\sin\alpha=0\\3\cos\alpha+2\sin\alpha=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}\\\cos\alpha=\dfrac{12}{13}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Do đó, $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{7}{13}$.

Đáp án A

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $\cos2\alpha=-\dfrac{1}{3}$. Tính $P=\left(1+3\sin^2\alpha\right)\left(1-4\cos^2\alpha\right)$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$

B. $P=\dfrac{-1}{2}$

C. $P=-1$

D. $P=1$

Phương pháp

Sử dụng công thức: $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2};\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$

Lời giải

Ta có: $P=\left(1+3.\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}\right)\left(1-4.\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\cos2\alpha\right)\left(-1-2\cos2\alpha\right)$

Thay $\cos2\alpha=-\dfrac{1}{3}$ vào P, ta được $P=\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\left(-1+\dfrac{2}{3}\right)=-1$

Đáp án B

Câu 4: Chọn đáp án đúng.

A. Đồ thị hàm số $y=\sin x$ nhận trục tung làm trục đối xứng

B. Đồ thị hàm số $y=\sin x$ nhận trục hoành làm trục đối xứng

C. Đồ thị hàm số $y=\sin x$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

D. Cả A và C đều đúng

Phương pháp
+ Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
+ Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
Lời giải
Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
Đáp án C
Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x$.
Tính $P = 2M + m$.

A. 11
B. 12
C. 13
D. 14

Phương pháp
Sử dụng kiến thức: $-1 \le \sin\alpha \le 1$
Lời giải

Ta có $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 2\sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 3 \le 2\sin^2 x + 3 \le 5$

$$\Rightarrow 3 \le y \le 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 2M + m = 2.5 + 3 = 13.$$

Đáp án C
Câu 6: Sử dụng máy tính cầm tay để giải phương trình $4\tan x - 9 = 0$ với kết quả là radian (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là:

A. $x \approx 1,15 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
B. $x \approx 1,15 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
C. Cả A và B đều đúng
D. Cả A và B đều sai

Phương pháp
Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của phương trình
Lời giải
Ta có: $4\tan x - 9 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2,25$
Sau khi chuyển máy tính sang chế độ "radian". Bấm liên tiếp

SHIFT	tan	2	x	2	5	=

Ta được kết quả gần đúng là 1,15.
Vậy phương trình $4\tan x - 9 = 0$ có họ nghiệm là $x \approx 1,15 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Đáp án A
Câu 7: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$x = 6\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

A. 10
B. 9
C. 13
D. 11

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên, khi đó x = 0, ta có:

$$6\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \le t \le 6$ hay $0 \le \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \le 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \le k \le \frac{90 - 2\pi}{3\pi}$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \left\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\right\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Đáp án B

Câu 8: Dãy số có các số hạng cho bởi $-2;2;-2;2;-2;\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 2\left(-1\right)^{n+1}$.

B. $u_n = 2\left(-1\right)^{n}$.

C. $u_n = -2$.

D. $u_n = 2$.

Phương pháp

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số $\left(u_n\right)$: Từ các số đã cho của dãy số, biến đổi sao cho các số hạng có chung một quy luật theo n, từ đó tìm được số hạng tổng quát u_n

Lời giải

Ta có: $u_1 = -2 = 2\left(-1\right)^1; u_2 = 2 = 2.\left(-1\right)^2; u_3 = -2 = 2\left(-1\right)^3; u_4 = 2 = 2\left(-1\right)^4; u_5 = -2 = 2\left(-1\right)^5; \cdots$.

Do đó, ta dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 2\left(-1\right)^n$.

Đáp án B

Câu 9: Cho dãy số $\left(u_n\right) = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + ... + \frac{1}{n\left(n+3\right)}$. Chọn đáp án đúng.

A. Dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn trên và không bị chặn dưới

B. Dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn dưới và không bị chặn trên

C. Dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn

D. Dãy số $\left(u_n\right)$ không bị chặn

Phương pháp

Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số $\left(u_n\right)$ được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho $m \le u_n \le M\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có $u_n > 0\ \forall n = 1;\ 2;\ 3;\ 4;$ nên u_n bị chặn dưới bởi 0.

Ta có: $(u_n) = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + ... + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + ... + \frac{3}{n(n+3)}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)$

Ta có: $1 - \frac{1}{n+3} < 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+3}\right) < \frac{1}{4}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó, dãy số (u_n) bị chặn trên.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Đáp án C

Câu 10: Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; \frac{-1}{2}; -1; \frac{-3}{2}$. Chọn khẳng định đúng.

A. Dãy số trên là cấp số cộng có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công sai $\frac{1}{2}$

B. Dãy số trên là cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội $\frac{1}{2}$

C. Dãy số trên là cấp số nhân có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội $-\frac{1}{2}$

D. Dãy số trên là cấp số cộng có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công sai $-\frac{1}{2}$

Phương pháp

Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d, tức là: $u_n = u_{n-1} + d$ với $n \ge 2$

Lời giải

Nhận thấy các số hạng của dãy số trên, kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với $-\frac{1}{2}$ nên dãy số $\frac{1}{2}; 0; \frac{-1}{2}; -1; \frac{-3}{2}$ là cấp số cộng có có số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công sai $-\frac{1}{2}$.

Đáp án D

Câu 11: Mặt sàn tầng 1 (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,6m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 15cm. Độ cao của mặt sàn tầng hai so với mặt sân là:

A. 4,25m

B. 4,2m

C. 4,35m

D. 4,3m

Phương pháp

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát được xác định theo công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$

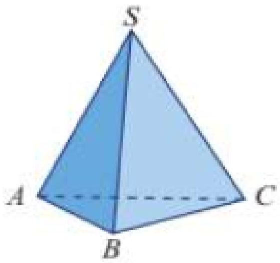
Lời giải
Gọi độ cao của bậc thứ n so với mặt sân là u_n.
Mỗi bậc cao 0,15m, sàn tầng 1 cao hơn mặt sân 0,6m nên bậc đầu tiên cao hơn mặt sân: $0,6+0,15=0,75\left(m\right)$ hay $u_1=0,75$
Từ các bậc sau, bậc sau cao hơn bậc trước 0,15m nên độ cao so với mặt sân của hai bậc liên tiếp cũng hơn kém nhau 0,15m. Do đó, độ cao từ các bậc so với mặt sân, từ bậc 1 đến bậc 25 tạo thành một cấp số cộng với $u_1=0,75$ và công sai $d=0,15$. Khi đó, ta có: $u_n=0,75+\left(n-1\right)0,15=0,6+n.0,15$
Chiều cao của mặt sàn tầng hai so với mặt sân là: $n_{25}=0,6+25.0,15=4,35\left(m\right)$
Vậy chiều cao của mặt sàn tầng hai so với mặt sân là 4,35m
Đáp án C
Câu 12: Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ 3 trồng 3 cây, …, cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây trồng được là:

A. 79 hàng B. 78 hàng
C. 80 hàng D. 77 hàng

Phương pháp
Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu u_1 và công sai d. Đặt $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$.
Khi đó: $S_n=\dfrac{\left(u_1+u_n\right)n}{2}=\dfrac{\left[2u_1+\left(n-1\right)d\right]n}{2}$
Lời giải
Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n. Ta có: $u_1=1,u_2=2,u_3=3,...,$ và $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n=3003$
Nhận thấy dãy số $\left(u_n\right)$ là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1,$ công sai $d=1$.
Do đó, $S_n=\dfrac{\left[2u_1+\left(n-1\right)d\right]n}{2}=3003\Leftrightarrow\dfrac{n\left[2.1+\left(n-1\right).1\right]}{2}=3003$
$\Leftrightarrow n\left(n+1\right)=6006\Leftrightarrow n^2+n-6006=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=77\\n=-78\left(L\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow n=77$
Vậy số hàng cây trồng được là 77 hàng.
Đáp án D

Câu 13: Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên là ước của 10. Chọn khẳng định đúng
A. Dãy số trên là dãy số hữu hạn gồm 8 số hạng
B. Dãy số trên là dãy số hữu hạn gồm 4 số hạng
C. Dãy số trên là dãy số hữu hạn gồm 5 số hạng
D. Dãy số trên là dãy số vô hạn
Phương pháp
Hàm số u xác định trên tập hợp $M=\left\{1;2;3;..;m\right\}$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn.
Lời giải
Dãy số gồm tất cả các số tự nhiên là ước của 10 là 1; 2; 5; 10. Do đó, dãy số trên là dãy số hữu hạn gồm 4 số hạng.
Đáp án B

Câu 14: Hình vẽ dưới đây là hình gì?



A. Hình chóp tam giác B. Hình tứ diện

C. Cả A và B đều đúng D. Cả A và B đều sai

Phương pháp

+ Cho đa giác lồi $A_1A_2A_3....A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α). Nối S với các đỉnh $A_1; A_2; A_3;...; A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2; SA_2A_3;...; SA_nA_1$. Hình được tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3....A_n$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2A_3....A_n$.

+ Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình tạo bởi bốn tam giác ABC, ACD, ADB, BCD được gọi là hình tứ diện (hay tứ diện), kí hiệu ABCD.

Lời giải

Hình vẽ trên là hình chóp tam giác, hình tứ diện.

Đáp án C

Câu 15: Cho bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trong một mặt phẳng và không có 3 điểm nào không thẳng hàng. Điểm S không thuộc mặt phẳng chứa 4 điểm A, B, C, D. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng được tạo thành từ 5 điểm trên?

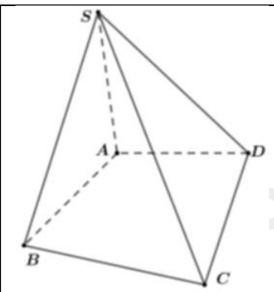
A. 6 mặt phẳng B. 7 mặt phẳng

C. 3 mặt phẳng D. 4 mặt phẳng

Phương pháp

Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.

Lời giải

Các mặt phẳng được tạo thành là: (SAB), (SAC), (SAD), (SBC), (ABCD), (SBD), (SCD). Vậy có 7 mặt phẳng được tạo thành. **Đáp án B**	

Câu 16: Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SB. Giao điểm của AI và mặt phẳng (SCD) là:

A. Điểm M là giao điểm của AI và SC

B. Điểm M là giao điểm của AI và SD

C. Điểm M là giao điểm của AI và SO, với O là giao điểm của AC và BD.

D. Điểm M là giao điểm của AI và SO, với O là giao điểm của AB và CD.

Phương pháp

Cách tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α):

Trường hợp 1: (α) chứa đường thẳng d’ và d’ cắt đường thẳng d tại I.

Khi đó, $I = d \cap d' \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$

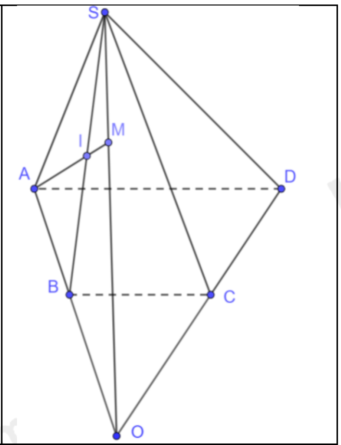
Trường hợp 2: (α) không chứa đường thẳng nào cắt d.

+ Tìm mặt phẳng (β) chứa d và $(\alpha) \cap (\beta) = d'$

+ Tìm $I = d \cap d'$. Khi đó, $I = d \cap (\alpha)$

Lời giải

Trong mặt phẳng (ABCD), gọi O là giao điểm của AB và CD. Do đó, O thuộc cả hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD)
Lại có, S thuộc cả hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).
Do đó, SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)
Trong mặt phẳng (SOA), gọi M là giao điểm của AI và SO. Vì M thuộc SO nên M thuộc mặt phẳng (SCD) và M thuộc AI nên M là giao điểm của AI và mặt phẳng (SCD).
Đáp án D



Câu 17: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thang. Trong các cặp đường thẳng sau, cặp đường thẳng nào **không** cắt nhau?

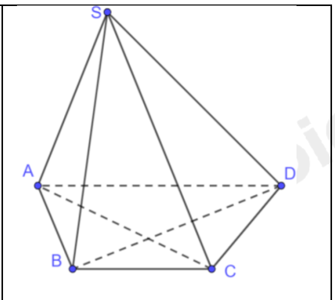
A. SA và AC
B. AB và BC
C. SB và DA
D. AC và DB

Phương pháp

Nếu hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung duy nhất thì hai đường thẳng đó cắt nhau.

Lời giải

Hai đường thẳng SB và DA không cùng nằm trong mặt phẳng nào nên hai đường thẳng này không cắt nhau.
Các cặp đường thẳng còn lại đều cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung duy nhất nên các cặp đường thẳng đó cắt nhau.
Đáp án C



Câu 18: Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{BC}$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) là:

A. Đường thẳng qua D song song với MN
B. Đường thẳng qua D song song với BC
C. Cả A, B đều đúng
D. Cả A, B đều sai

Phương pháp

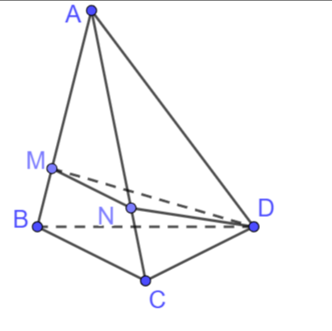
Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Lời giải

Tam giác ABC có: $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$ nên MN//BC.

Vì mặt phẳng (DMN) đi qua đường thẳng MN, mặt phẳng (DBC) đi qua đường thẳng BC và D là điểm chung của hai mặt phẳng (DBC) và mặt phẳng (DMN). Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) là đường thẳng qua D song song với MN và BC.

Đáp án C



Câu 19: Cho hình chóp S. ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng, AB, BC, CD, DA, PQ, có bao nhiêu đường thẳng song song với MN?

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

Phương pháp

Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lời giải

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB nên MN là đường trung bình của tam giác SAB. Do đó, MN//AB.

Vì ABCD là hình bình hành nên AB//CD.

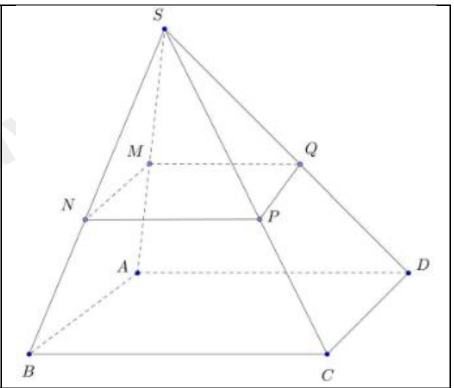
Do đó, MN//AB//CD.

Vì P, Q lần lượt là trung điểm của SC, SD nên PQ là đường trung bình của tam giác SCD. Do đó, PQ//DC.

Suy ra: MN//AB//CD//PQ

Vậy trong các đường thẳng AB, BC, CD, DA, PQ, có 3 đường thẳng song song với MN.

Đáp án C



Câu 20: Để tiết kiệm năng lượng, một công ty điện lực đề xuất bán điện sinh hoạt cho dân theo hình thức lũy tiến (bậc thang) như sau: Mỗi bậc gồm 10 số; bậc 1 từ số thứ 1 đến số thứ 10, bậc 2 từ số thứ 11 đến số thứ 20, bậc 3 từ số thứ 21 đến số thứ 30; … Bậc 1 có giá là 600 đồng/1 số, giá của mỗi số ở bậc thứ $n+1$ tăng so với giá của bậc thứ n là $2,5\%$. Gia đình ông A sử dụng hết 345 số trong tháng 1. Hỏi tháng 1 ông A phải đóng bao nhiêu tiền? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, đơn vị là đồng)

A. 322 623,28 đồng B. 320 622,28 đồng

C. 321 621,28 đồng D. 324 620,28 đồng

Phương pháp

Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức $u_n=u_1.q^{n-1}$ với $n\ge 2$

Cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu là u_1 và công bội q khác 0. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Khi đó:

$$S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$$

Lời giải

Gọi u_1 là số tiền phải trả cho 10 số điện đầu tiên, khi đó, $u_1 = 600.10 = 6\,000$ (đồng).

u_2 là số tiền phải trả cho các số điện từ 11 đến 20: $u_2 = u_1\left(1+0,025\right)$ (đồng)

u_3 là số tiền phải trả cho các số điện từ 21 đến 30: $u_3 = u_2\left(1+0,025\right) = u_1\left(1+0,025\right)^2$ (đồng)

…

u_{34} là số tiền phải trả cho các số điện từ 331 đến 340: $u_{34} = u_1\left(1+0,025\right)^{33}$ (đồng)

Số tiền phải trả cho 340 số điện đầu tiên là: $S_1 = u_1\dfrac{1-\left(1+0,025\right)^{34}}{1-\left(1+0,025\right)} \approx 315\,677,31$ (đồng)

Số tiền phải trả cho các số điện từ 341 đến 345 là: $S_2 = 5.600\left(1+0,025\right)^{34} \approx 6\,945,97$ (đồng)

Vậy tháng 1 gia đình ông A phải trả số tiền là: $315\,677,31 + 6\,945,97 = 322\,623,28$ (đồng)

Đáp án A

Phần tự luận (5 điểm)

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Giải các phương trình sau:

a) $8\sin^3 x - 1 = 0$

b) $\sin 4x + \cos 5x = 0$

2) Li độ s(cm) của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) cho bởi hàm số $s = 2\cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy xác định các thời điểm t trong 1 giây đầu tiên thì li độ s nằm trong đoạn $\left[-1;1\right]$ (cm).

3) Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2\left(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x\right)$. Tính tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(0;2020\right)$

Phương pháp

1) a) Xét phương trình $\sin x = m$

* Nếu $\left|m\right| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

* Nếu $\left|m\right| \le 1$ thì phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, với α là góc thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = m$

b) + Xét phương trình $\cos x = m$

* Nếu $\left|m\right| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

* Nếu $\left|m\right| \le 1$ thì phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, với α là góc thuộc $\left[0;\pi\right]$ sao cho $\cos\alpha = m$

2) Sử dụng kiến thức $-1 \le \sin x \le 1$

3) $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right), \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Lời giải

1) a) $8\sin^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình đã cho có họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

b) $\sin 4x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = -\sin 4x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

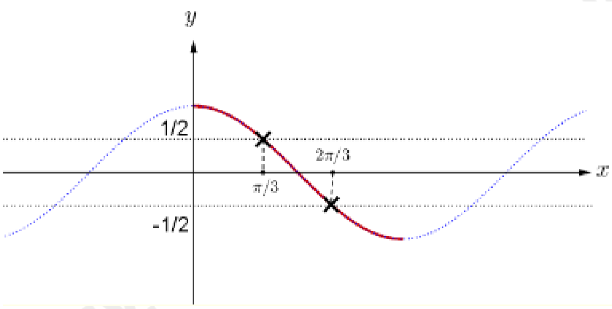
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = 4x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 5x = -\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình đã cho có họ nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

2) Ta có: $s \in \left[-1;1\right]$ nên $-1 \le 2\cos \pi t \le 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \le \cos \pi t \le \frac{1}{2}$

Trong 1 giây đầu tiên: $0 \le t \le 1 \Rightarrow 0 \le \pi t \le \pi$

Đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[0;\pi\right]$:



Dựa vào đồ thị ta thấy: $\frac{-1}{2} \le \cos \pi t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \le \pi t \le \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}$

Vậy $t \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

3) $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2\left(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x\right) \Leftrightarrow \sin^{2018} x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos^{2018} x\left(1 - 2\cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^{2018} x\cos 2x - \cos^{2018} x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \end{array}\right.$

+ $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \left(k \in \mathbb{Z}\right)\left(1\right)$

+ $\sin^{2018} x = \cos^{2018} x \Leftrightarrow \tan^{2018} x = 1$ (do $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không là nghiệm của phương trình)

$\Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Do $x \in \left(0;2020\right)$ nên $0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2020 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < k < \frac{8080 - \pi}{2\pi}$. Mà k là số nguyên nên $k \in \left\{0;1;2;...;1285\right\}$

Vậy tổng các nghiệm của x thuộc khoảng $\left(0;2020\right)$ là:

$1286.\frac{\pi}{4} + \left(1 + 2 + ... + 1285\right)\frac{\pi}{2} = \frac{643\pi}{2} + \frac{1285.1286}{4}.\pi = 413\,449\pi$

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

b) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ có số hạng tổng quát là $u_n = 2\left(3^n\right)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức truy hồi của dãy số trên?

Phương pháp

a) Nếu một cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 + \left(n-1\right)d, n \ge 2$

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{\left(u_1 + u_n\right)n}{2} = \frac{\left[2u_1 + \left(n-1\right)d\right]n}{2}$

b) Công thức truy hồi là hệ thức biểu thị số hạng thứ n của dãy số qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2\left(u_1 + 4d\right) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$;

$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$

b) Ta có: $u_1 = 2.3^1 = 6, u_2 = 2.3^2 = 18 = 3u_1, u_3 = 2.3^3 = 54 = 3u_2, u_4 = 2.3^4 = 162 = 3u_3$

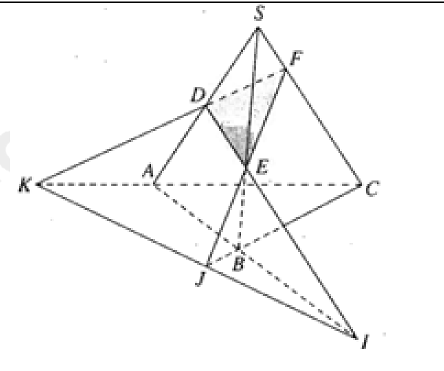
Do đó, công thức truy hồi của dãy số trên là: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases} \left(n \in \mathbb{N}*\right)$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho tứ diện SABC. Trên SA, SB và SC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Phương pháp

Nếu hai mặt phân biệt (P) và (Q) có điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất d chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng d đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), kí hiệu $d = \left(P\right) \cap \left(Q\right)$

Lời giải

<table>
<tr>
<td>Trong mặt phẳng (SAB), I là giao điểm của DE và AB.
Ta có: $I \in DE \subset (DEF), I \in AB \subset (ABC)$
Lí luận tương tự ta có J, K đều thuộc hai mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (DEF).
Do đó, 3 điểm I, J, K đều thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (DEF).
Do đó, 3 điểm I, J, K thẳng hàng.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Bài 4. (1,0 điểm)

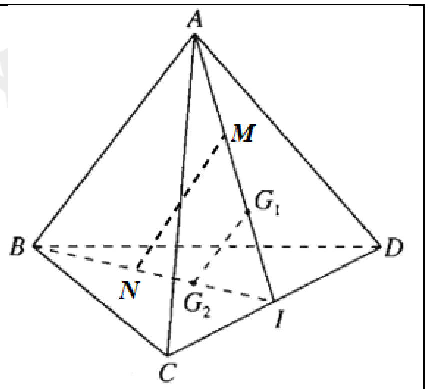
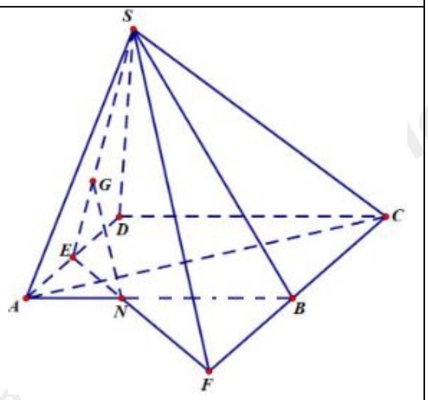
a) Cho tứ diện ABCD có G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác ACD và tam giác BCD. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của CD, IA, IB. Tứ giác G_1G_2NM là hình gì?

b) Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD. N thuộc cạnh AB thỏa mãn $AB = 3NA$. Gọi E là trung điểm của AD, F là giao điểm của NE và BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFS) và mặt phẳng (EGN)

Phương pháp

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Lời giải

<table>
<tr>
<td>a) Vì G_1 là trọng tâm tam giác ADC nên $\frac{IG_1}{IA} = \frac{1}{3}$
Vì G_2 là trọng tâm tam giác BDC nên $\frac{IG_2}{IB} = \frac{1}{3}$
Do đó, $\frac{IG_2}{IB} = \frac{IG_1}{IA}$ nên G_1G_2//AB
Vì M, N lần lượt là trung điểm của IA, IB nên MN//AB.
Do đó, MN//G_1G_2. Vậy tứ giác G_1G_2NM là hình thang.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Vì G là trọng tâm của tam giác SAD nên $\frac{EG}{ES} = \frac{1}{3}$
Lại có: DE//CF nên $\frac{NE}{NF} = \frac{NA}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NE}{EF} = \frac{1}{3}$
Tam giác SEF có: $\frac{EG}{ES} = \frac{NE}{EF}$ nên GN//SF (định lý Thalès đảo).
Vì mặt phẳng (ENG) chứa NG, mặt phẳng (SEF) đi qua SF, và E là điểm chung của hai mặt phẳng (ENG) và (SEF). Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (EFS) và mặt phẳng (EGN) là đường thẳng qua E và song song với GN, SF.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>