

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ 1**Môn: Toán - Lớp 8****Bộ sách Cánh diều****BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM****Mục tiêu**

- Ôn tập và củng cố lại các kiến thức, áp dụng giải các dạng bài tập liên quan của chương trình học kì 1 sách giáo khoa Toán 8 – Cánh diều.
- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.
- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dàn trải các kiến thức học kì 1 – chương trình Toán 8.

A. NỘI DUNG ÔN TẬP**Đại số**

1. Các phép tính với đa thức nhiều biến

2. Hằng đẳng thức đáng nhớ

- Các hằng đẳng thức đáng nhớ

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

3. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

6. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

7. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

- Vận dụng hằng đẳng thức vào phân tích đa thức thành nhân tử

3. Phân thức đại số, các phép toán với phân thức đại số

- Phân thức đại số

- Cộng, trừ phân thức

- Nhân, chia phân thức

Hàm số và đồ thị

- Mặt phẳng tọa độ và đồ thị của hàm số

- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Đồ thị của hàm số bậc nhất

Hình học

1. Hình chóp đều

- Hình chóp tam giác đều

- Hình chóp tứ giác đều

2. Định lí Pythagore

3. Tứ giác: các định nghĩa, tính chất và dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác
- Hình thang cân
- Hình bình hành
- Hình chữ nhật
- Hình thoi
- Hình vuông

B. BÀI TẬP

I. Phần trắc nghiệm

Câu 1: Kết quả phân tích đa thức $4x^2 - 9$ thành đa thức là:

A. $(2x-3)(2x+3)$.

B. $(2x-9)(2x+9)$.

C. $(4x-3)(4x+3)$.

D. $(4x-9)(4x+9)$.

Câu 2: Thực hiện phép chia đa thức $x^3 + 1$ cho đa thức $x^2 - x + 1$ ta được số dư là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 3: Điều kiện xác định của phân thức $\frac{x(x-3)}{x^2-9}$ là:

A. $x \neq 3$.

B. $x \neq 0; x \neq 3$.

C. $x \neq \pm 3$.

D. $x \neq 0$.

Câu 4: Rút gọn phân thức $\frac{2x-2y}{x-y}$ ta được kết quả là :

A. $x-y$.

B. $2x$.

C. 2.

D. $2(x-y)$.

Câu 5: Phép tính $M - \frac{2x-1}{5-x}$ không biến đổi được thành:

A. $M - \frac{1-2x}{x-5}$.

B. $M + \frac{2x-1}{x-5}$.

C. $M - \frac{1-2x}{5-x}$.

D. $M + \frac{1-2x}{5-x}$.

Câu 6: Kết quả của phép tính $\frac{4x+1}{7x^2} - \frac{1-3x}{7x^2}$ bằng :

A. $\frac{1}{7x}$.

B. $\frac{7x-2}{7x^2}$.

C. $\frac{7}{x}$.

D. $\frac{1}{x}$.

Câu 7: Kết quả rút gọn phân thức $\frac{14xy^5(2x-3y)}{21x^2y(2x-3y)^2}$ là:

A. $\frac{2y^4}{3x(2x-3y)}$.

B. $2y^4$.

C. $3x(2x-3y)$.

D. $\frac{3x(2x-3y)}{2y^4}$.

Câu 8: Giá trị của x để giá trị phân thức $\frac{5x-2}{x^2+2x+1}$ bằng 0 là :

A. $x=0$.

B. $x=\frac{2}{5}$.

C. $x=\frac{5}{2}$.

D. $x=-1$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2 + 1$. Tính $f\left(-\frac{1}{2}\right); f(0)$.

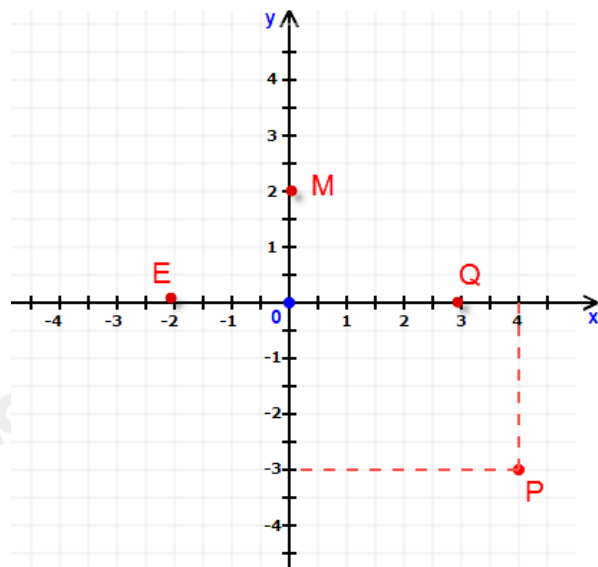
A. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}; f(0) = 0$.

B. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; f(0) = -1.$

C. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; f(0) = 1.$

D. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}; f(0) = 1.$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ. Câu trả lời nào sau đây không đúng ?



A. $E(-2;0).$

B. $M(0;2).$

C. $P(4;-3).$

D. $Q(0;3).$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, các điểm có hoành độ bằng 0 là

A. điểm nằm trên trục hoành.

B. điểm nằm trên trục tung.

C. điểm $A(0;3).$

D. gốc tọa độ

Câu 12: Xác định đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ có hệ số góc bằng -4 và đi qua điểm $A(3; -2)$ là

A. $y = -4x + 10.$

B. $y = 4x + 10.$

C. $y = -4x - 10.$

D. $y = -4x.$

Câu 13: Cho đường thẳng d: $y = 2x + 1$. Hệ số góc của đường thẳng d là?

A. $-2.$

B. $1.$

C. $\frac{1}{2}$

D. $2.$

Câu 14: Xác định đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ đi qua điểm $M(1;3)$ và song song với đường thẳng $y = 2x$

$-2.$

- A. $y = 2x + 1$.
- B. $y = 2x$.
- C. $y = -2x - 3$.
- D. $y = 2x - 2$.

Câu 15: Cho đường thẳng $d: y = -3x + 2$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục hoành và trục tung. Diện tích tam giác OAB là:

- A. $\frac{4}{3}$.
- B. $\frac{-2}{3}$.
- C. $\frac{3}{2}$.
- D. $\frac{2}{3}$.

Câu 16: Hình bình hành là tứ giác có

- A. hai cạnh song song.
- B. các cạnh đối song song.
- C. các góc bằng nhau.
- D. các góc đối bù nhau.

Câu 17: Hai đường chéo của hình chữ nhật

- A. song song với nhau.
- B. bằng nhau.
- C. vuông góc với nhau.
- D. là các đường phân giác của các góc.

Câu 18: Một tứ giác là hình vuông nếu nó

- A. có ba góc vuông.
- B. là hình thoi có một góc vuông.
- C. là hình bình hành có một góc vuông.
- D. là hình thang có hai góc vuông.

Câu 19: Hình thang cân là hình thang

- A. có hai cạnh bên bằng nhau.
- B. có hai cạnh đáy bằng nhau.
- C. có hai góc kề một cạnh bên bù nhau.
- D. có hai góc kề một đáy bằng nhau.

Câu 20: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- B. Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.
- C. Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình chữ nhật.
- D. Tứ giác có bốn góc bằng nhau là hình chữ nhật.

Câu 21: Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến, ta có:

- A. $S_{\triangle BM} = 2S_{\triangle ABC}$.
- B. $S_{\triangle BM} = S_{\triangle ABC}$.
- C. $S_{\triangle MC} = 2S_{\triangle ABC}$.
- D. $S_{\triangle MC} = 2S_{\triangle BM}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC, D là trung điểm của BC. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, cắt AC và AB theo thứ tự ở E và F. Tam giác ABC cần thêm điều kiện gì để AEDF là hình vuông?

- A. cân tại A.
- B. vuông tại A.
- C. vuông cân tại A.
- D. $A = 60^\circ$.

Câu 23: Hình bình hành cần thêm điều kiện gì để trở thành hình vuông?

- A. Hai đường chéo bằng nhau.
 B. Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.
 C. Hai cạnh kề bằng nhau.
 D. Có một góc vuông và hai đường chéo vuông góc với nhau.

Câu 24: Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AI, BD, CE đồng quy tại G. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của GC và GB. Khi đó tứ giác MNED là hình gì?

- A. Hình chữ nhật.
 B. Hình bình hành.
 C. Hình thang cân.
 D. Hình thang vuông.

Câu 25: Cho hình chóp tam giác đều có độ dài cạnh đáy là 7cm, độ dài trung đoạn của hình chóp là 8cm. Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều đó là:

- A. $44cm^2$.
 B. $84cm^2$.
 C. $45cm^2$.
 D. $50cm^2$.

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 4cm, chiều cao của hình chóp là $h = 3cm$. Thể tích của hình chóp đã cho là:

- A. $16cm^3$.
 B. $12cm^3$.
 C. $8cm^3$.
 D. $6cm^3$.

Câu 27: Tam giác có độ dài ba cạnh trong trường hợp nào sau đây là tam giác vuông?

- A. 10cm; 11cm; 9cm.
 B. 13cm; 8cm; 6cm.
 C. 6cm; 10cm; 8cm.
 D. 6cm; 11cm; 12cm.

Câu 28: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 20cm$, $AC = 21cm$. Độ dài cạnh BC là:

- A. 21cm.
 B. 39cm.
 C. 29cm.
 D. 26cm.

Câu 29: Một chiếc ti vi màn hình phẳng 32 inch với chiều ngang màn hình là 70cm. Tính chiều cao của màn hình ti vi đó, làm tròn đến số thập phân thứ nhất (biết 1 inch $\approx 2,54$ cm).

- A. 7,9cm.
 B. 41,3cm.
 C. 107,3cm.
 D. 77cm.

Câu 30: Cho hình thoi ABCD có chu vi bằng 40 cm, đường chéo AC bằng 12 cm. Độ dài đường chéo BD là:

- A. 4cm.
 B. 8cm.
 C. 16cm.
 D. 32cm.

II. Phần tự luận

Bài 1. Thực hiện các phép tính:

- a) $(x+3)(x-3)$.
 b) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot \left(6xy + \frac{3}{2}x^3y - 1\right)$.
 c) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$.
 d) $(6x^5y^2 - 9x^4y^3 + 15x^3y^4) : 3x^3y^2$.

e) $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2}$.

f) $\frac{30x^3}{11y^2} : \frac{25x}{121y^5}$.

g) $\frac{1}{y^2 - xy} + \frac{1}{x^2 - xy}$.

h) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x-2x^2}{x^2-9}$.

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3x^3 + 6x^2 + 3x$

b) $x^2 - y^2 - 2x + 2y$

c) $x^2 - 25 + y^2 + 2xy$

d) $x^2(x-1) + 16(1-x)$

e) $8a(b-c) + 6b(c-b)$

f) $x^2 + 8x + 15$

g) $x^2 - x - 12$

h) $(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) + 2$

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x}$

a) Viết điều kiện xác định của biểu thức P;

b) Rút gọn biểu thức P;

c) Tính giá trị của biểu thức P tại $x = 1$; $x = -1$.

Bài 4. Cho biểu thức $M = \left(\frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} \right) : \left(1 - \frac{1}{x+2} \right)$ (Với $x \neq -1; x \neq -2; x \neq 2; x \neq 3$)

a) Rút gọn M.

b) Tìm các giá trị của x để $M = \frac{3}{5}$.

c) Tìm giá trị của M biết $|x-1| = 3$.

d) Tìm x để biểu thức $P = M(x^2 - 9)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 5. Chứng minh giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

a) $A = 2xy + \frac{1}{2}x(2x - 4y + 4) - x(x + 2)$

b) $B = (x+2)^2 - (x-3)^2 - 10x$

Bài 6. Chim cắt là loài chim lớn, có bản tính hung dữ, đặc điểm nổi bật nhất của chúng là đôi mắt rực sáng, bộ móng vuốt và chiếc mỏ sắc như dao nhọn, chúng có khả năng lao nhanh như tên bắn và là nỗi khiếp đảm của không ít các loài chim trời, rắn và những loài thú nhỏ như chuột, thỏ, sóc,...



a) Từ vị trí cao 16m so với mặt đất, đường bay lên của chim cắt được cho bởi công thức $y = 30x + 16$ (trong đó y là độ cao so với mặt đất, x là thời gian tính bằng giây, $x > 0$). Hỏi nếu nó muốn bay lên để đậu trên một núi đá cao 256m so với mặt đất thì tốn bao nhiêu giây?

b) Từ vị trí cao 256m so với mặt đất hãy tìm độ cao khi nó bay xuống sau 3 giây. Biết đường bay xuống của nó được cho bởi công thức: $y = -40x + 256$.

Bài 7. Hãng taxi thứ nhất có giá như sau: mở cửa là 10 nghìn đồng, sau đó mỗi km giá 12 nghìn đồng.

Hãng taxi thứ hai có giá như sau: Mỗi km tính giá 14 nghìn đồng.

a) Viết công thức tính y (số tiền khách phải trả) theo x (số km xe chở khách) của mỗi hãng xe taxi.

b) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng vừa tìm ở câu a.

Bài 8. Cho ba đường thẳng $d_1: y = x + 2$, $d_2: y = 3x + 2$ và $d_3: y = (4 - m)x + 1 + m$.

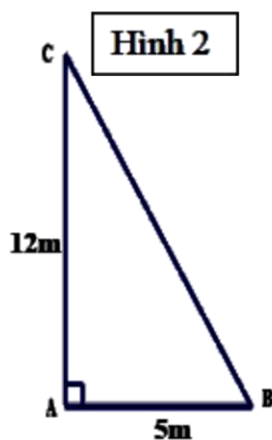
a) Vẽ các đường thẳng d_1 , d_2 trong cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm giao điểm A của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

c) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d_3 đi qua điểm A .

Bài 9.

a) Một cây cao 12m mọc cạnh bờ sông. Trên đỉnh cây có một con chim đang đậu và chuẩn bị sà xuống bắt con cá trên mặt nước (như hình 1 và được mô phỏng như hình 2). Hỏi con chim sẽ bay một đoạn ngắn nhất bằng bao nhiêu mét thì bắt được con cá? (Biết con cá cách gốc cây 5m và nước cao mấp mé bờ sông)



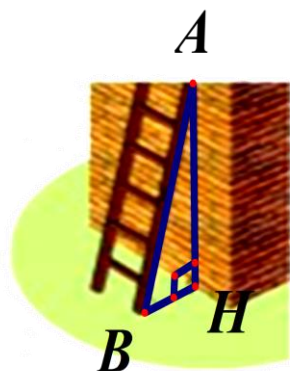
b) Cho tam giác ABC , đường cao AH . Biết $AC = 15$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Bài 10. Một chiếc thang có chiều dài $AB = 3,7$ m đặt cách một bức tường khoảng cách $BH = 1,2$ m.

a) Tính chiều cao AH.

b) Khoảng cách đặt thang cách chân tường là BH có “an toàn” không? Biết rằng khoảng cách “an toàn” khi

$$2,0 < \frac{AH}{BH} < 2,2 \quad (\text{xem hình vẽ}).$$



$$AB = 3,7m$$

$$BH = 1,2m$$

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD có AC vuông góc với AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh $AF = FC$.

b) Chứng minh tứ giác AECF là hình thoi.

c) Chứng minh AC, BD, EF đồng quy.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại C. Gọi D là trung điểm của AB, kẻ DM vuông góc với AC ($M \in AC$). Gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, DE cắt BC tại N.

a) Chứng minh tứ giác CMDN là hình chữ nhật.

b) Tứ giác BDCE là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CMDN}$.

d) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để tứ giác ABEC là hình thang cân?

Bài 13. Cho tam giác MNP vuông cân tại M. Gọi Q là điểm đối xứng của M qua NP.

a) Chứng minh rằng tứ giác MNQP là hình vuông;

b) Trên tia đối của các tia PQ và MP lần lượt lấy điểm A và B sao cho $QA = MB$. Chứng minh rằng tam giác BNA là tam giác vuông cân;

c) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác IPN là tam giác cân.

d) Chứng minh 3 điểm Q, M, I thẳng hàng.

Bài 14*.

a) Tính GTNN của biểu thức $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$.

b) Tính GTLN của biểu thức $N = \frac{2x^2 + 4x + 10}{x^2 + 2x + 3}$.

Bài 15*. Cho $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$M = a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b).$$

----- Hết -----

**I. Trắc nghiệm**

Câu 1. A	Câu 2. A	Câu 3. C	Câu 4. C	Câu 5. C	Câu 6. A
Câu 7. A	Câu 8. B	Câu 9. C	Câu 10. D	Câu 11. B	Câu 12. A
Câu 13. D	Câu 14. A	Câu 15. D	Câu 16. B	Câu 17. B	Câu 18. B
Câu 19. D	Câu 20. C	Câu 21. D	Câu 22. C	Câu 23. D	Câu 24. B
Câu 25. B	Câu 26. A	Câu 27. C	Câu 28. C	Câu 29. B	Câu 30. C

II. Phần tự luận**Bài 1.** Thực hiện các phép tính:

a) $(x+3)(x-3)$.

b) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot \left(6xy + \frac{3}{2}x^3y - 1\right)$.

c) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$.

d) $(6x^5y^2 - 9x^4y^3 + 15x^3y^4) : 3x^3y^2$.

e) $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2}$.

f) $\frac{30x^3}{11y^2} : \frac{25x}{121y^5}$.

g) $\frac{1}{y^2-xy} + \frac{1}{x^2-xy}$.

h) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x-2x^2}{x^2-9}$.

Phương pháp

Sử dụng các phép tính với đa thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ.

Lời giải

a) $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

b) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot \left(6xy + \frac{3}{2}x^3y - 1\right)$

$$= \frac{1}{2}xy^2 \cdot 6xy + \frac{1}{2}xy^2 \cdot \frac{3}{2}x^3y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$= 3x^2y^3 + \frac{3}{4}x^4y^3 - \frac{1}{2}xy^2$$

c) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) = (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3$

d) $(6x^5y^2 - 9x^4y^3 + 15x^3y^4) : 3x^3y^2$

$$= 6x^5y^2 : 3x^3y^2 - 9x^4y^3 : 3x^3y^2 + 15x^3y^4 : 3x^3y^2$$

$$= 2x^2 - 3xy + 5y^3$$

$$e) \frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2} = \frac{15x \cdot 2y^2}{7y^3 \cdot x^2} = \frac{30xy^2}{7x^2y^3} = \frac{30}{7xy}$$

$$f) \frac{30x^3}{11y^2} : \frac{25x}{121y^5} = \frac{30x^3}{11y^2} \cdot \frac{121y^5}{25x} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11^2 \cdot x^3 \cdot y^5}{11 \cdot 5^2 \cdot xy^2} = \frac{6 \cdot 11 \cdot x^2 \cdot y^3}{5} = \frac{66x^2y^3}{5}$$

$$g) \frac{1}{y^2 - xy} + \frac{1}{x^2 - xy} = \frac{1}{y(y-x)} + \frac{1}{x(x-y)} = \frac{x}{xy(y-x)} - \frac{y}{xy(y-x)} = \frac{x-y}{xy(y-x)} = \frac{-(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{-1}{xy}$$

$$h) \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x-2x^2}{x^2-9} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{(1-x)(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \frac{2x-2x^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{(x+1)(x+3) - (1-x)(x-3) + 2x - 2x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 + x + 3x + 3 - x + x^2 + 3 - 3x + 2x - 2x^2}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{(x^2 + x^2 - 2x^2) + (x + 3x - x - 3x + 2x) + (3 + 3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x + 6}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2}{x-3}$$

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

- $3x^3 + 6x^2 + 3x$
- $x^2 - y^2 - 2x + 2y$
- $x^2 - 25 + y^2 + 2xy$
- $x^2(x-1) + 16(1-x)$
- $8a(b-c) + 6b(c-b)$
- $x^2 + 8x + 15$
- $x^2 - x - 12$
- $(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) + 2$

Phương pháp

Sử dụng các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử để phân tích

Lời giải

- $3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(x^2 + 2x + 1) = 3x(x+1)^2$
- $x^2 - y^2 - 2x + 2y = (x-y)(x+y) - 2(x-y) = (x-y)(x+y-2)$
- $x^2 - 25 + y^2 + 2xy = (x^2 + 2xy + y^2) - 25 = (x+y)^2 - 25 = (x+y-5)(x+y+5)$
- $x^2(x-1) + 16(1-x) = x^2(x-1) - 16(x-1) = (x^2 - 16)(x-1) = (x-4)(x+4)(x-1)$
- $8a(b-c) + 6b(c-b) = 8a(b-c) - 6b(b-c) = (b-c)(8a - 6b)$
- $x^2 + 8x + 15 = x^2 + 3x + 5x + 15 = x(x+3) + 5(x+3) = (x+5)(x+3)$
- $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = x(x-4) + 3(x-4) = (x+3)(x-4)$
- $(x^2 + x)^2 + 3(x^2 + x) + 2 = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) + 2(x^2 + x) + 2 = (x^2 + x)(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)$

Bài 3. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x}$

- Viết điều kiện xác định của biểu thức P;
- Rút gọn biểu thức P;
- Tính giá trị của biểu thức P tại $x = 1$; $x = -1$.

Phương pháp

- a) Để phân thức xác định thì mẫu thức phải khác 0.
- b) Sử dụng các tính chất và phép tính của phân thức để rút gọn biểu thức.
- c) Thay $x = 1$, $x = -1$ vào biểu thức đã rút gọn để tính P.

Lời giải

a) Để biểu thức P xác định thì các phân thức trong P phải xác định.

Phân thức $\frac{x^2}{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow x+1 \neq 0$ hay $x \neq -1$.

Phân thức $\frac{2(x-1)}{x}$ xác định $\Leftrightarrow x \neq 0$.

Phân thức $\frac{x+2}{x^2+x}$ xác định $\Leftrightarrow x^2+x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0$ hay $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

Vậy điều kiện xác định của biểu thức P là $x \notin \{-1; 0\}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x^2+x} \\ &= \frac{x^2}{x+1} + \frac{2(x-1)}{x} + \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3}{x(x+1)} + \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)} + \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3 + 2(x-1)(x+1) + x + 2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3 + 2(x^2 - 1) + x + 2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 - 2 + x + 2}{x(x+1)} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x(x+1)} \\ &= \frac{x(x^2 + 2x + 1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x(x+1)^2}{x(x+1)} \\ &= x+1 \end{aligned}$$

c) Tại $x = 1$, ta có: $P = 1+1 = 2$

Tại $x = -1$, ta có: $P = -1+1 = 0$

Bài 4. Cho biểu thức $M = \left(\frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} \right) : \left(1 - \frac{1}{x+2} \right)$ (Với $x \neq -1; x \neq -2; x \neq 2; x \neq 3$)

a) Rút gọn M.

b) Tìm các giá trị của x để $M = \frac{3}{5}$.

c) Tìm giá trị của M biết $|x-1| = 3$.

d) Tìm x để biểu thức $P = M(x^2 - 9)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp

a) Sử dụng các tính chất và phép tính của phân thức để rút gọn biểu thức.

b) Thay $M = \frac{3}{5}$ để tìm x.

c) Tìm x, thay giá trị của x vào M để tính giá trị của M.

d) Tính P. Biến đổi P thành dạng $P = a^2 + b$, giá trị nhỏ nhất của P là b.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} \right) : \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) \quad (\text{Với } x \neq -1; x \neq -2; x \neq 2; x \neq 3) \\ &= \left[\frac{2x-9}{(x-2)(x-3)} - \frac{x+3}{x-2} + \frac{2x+1}{x-3} \right] : \frac{x+2-1}{x+2} \\ &= \left[\frac{2x-9}{(x-2)(x+3)} - \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \right] : \frac{x+1}{x+2} \\ &= \frac{2x-9-x^2+9+2x^2+x-4x-2}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{x+2}{x+1} \\ &= \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{x+2}{x+1} \\ &= \frac{(x-2)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{x+2}{x-3} \end{aligned}$$

b) Thay $M = \frac{3}{5}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-3} &= \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5(x+2) = 3(x-3) \\ \Leftrightarrow 5x+10 &= 3x-9 \\ \Leftrightarrow 2x &= -19 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-19}{2} \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{-19}{2}$ thì $M = \frac{3}{5}$.

c) Ta có: $|x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3$ hoặc $x-1 = -3$.

TH1. $x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$

Thay $x = 4$ vào M, ta được: $M = \frac{4+2}{4-3} = \frac{6}{1} = 6$.

TH2. $x-1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$

Thay $x = -2$ vào M, ta được: $M = \frac{-2+2}{-2-3} = \frac{0}{-5} = 0$.

d) Ta có: $P = M(x^2 - 9)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x+2}{x-3}(x-3)(x+3) \\
 &= (x+2)(x+3) \\
 &= x^2 + 5x + 6 \\
 &= \left(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right) - \frac{1}{4} \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{4}$ khi $x = -\frac{5}{2}$.

Bài 5. Chứng minh giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

a) $A = 2xy + \frac{1}{2}x(2x - 4y + 4) - x(x + 2)$

b) $B = (x + 2)^2 - (x - 3)^2 - 10x$

Phương pháp

Sử dụng các phép tính với đa thức và các hằng đẳng thức đáng nhớ biến đổi biểu thức sao cho không còn ẩn.

Lời giải

a) $A = 2xy + \frac{1}{2}x(2x - 4y + 4) - x(x + 2)$

$$A = 2xy + x^2 - 2xy + 2x - x^2 - 2x$$

$$A = (2xy - 2xy) + (x^2 - x^2) + (2x - 2x)$$

$$A = 0$$

Vì $A = 0$ nên A không phụ thuộc vào biến x, y.

b) $B = (x + 2)^2 - (x - 3)^2 - 10x$

$$B = (x + 2 - x + 3)(x + 2 + x - 3) - 10x$$

$$B = 5(2x - 1) - 10x$$

$$B = 10x - 5 - 10x$$

$$B = -5$$

Vì $B = -5$ nên B không phụ thuộc vào biến x, y.

Bài 6. Chim cắt là loài chim lớn, có bản tính hung dữ, đặc điểm nổi bật nhất của chúng là đôi mắt rực sáng, bộ móng vuốt và chiếc mỏ sắc như dao nhọn, chúng có khả năng lao nhanh như tên bắn và là nỗi khiếp đảm của không ít các loài chim trời, rắn và những loài thú nhỏ như chuột, thỏ, sóc,...

a) Từ vị trí cao 16m so với mặt đất, đường bay lên của chim cắt được cho bởi công thức $y = 30x + 16$ (trong đó y là độ cao so với mặt đất, x là thời gian tính bằng giây, $x > 0$). Hỏi nếu nó muốn bay lên để đậu trên một núi đá cao 256m so với mặt đất thì tốn bao nhiêu giây ?



b) Từ vị trí cao 256m so với mặt đất hãy tìm độ cao khi nó bay xuống sau 3 giây. Biết đường bay xuống của nó được cho bởi công thức : $y = -40x + 256$.

Phương pháp

a) Thay $y = 256$ vào công thức y để tính số giây.

b) Thay $x = 3$ vào công thức y để tính độ cao khi nó bay xuống sau 3 giây.

Lời giải

a) Con chim bay lên để đậu trên một núi đá cao 256m, khi đó $y = 256$.

Thay $y = 256$ vào công thức $y = 30x + 16$, ta có:

$$256 = 30x + 16$$

$$30x = 256 - 16$$

$$30x = 240$$

$$x = 80$$

Vậy nếu nó muốn bay lên để đậu trên một núi đá cao 256m so với mặt đất thì tốn 80 giây.

b) Con chim bay xuống 3 giây, khi đó $x = 3$.

Thay $x = 3$ vào công thức $y = -40x + 256$, ta có:

$$y = -40.3 + 256$$

$$y = -120 + 256$$

$$y = 136$$

Vậy từ vị trí cao 256m so với mặt đất, con chim ở độ cao 136m khi nó bay xuống sau 3 giây.

Bài 7. Hãng taxi thứ nhất có giá như sau : mở cửa là 10 nghìn đồng, sau đó mỗi km giá 12 nghìn đồng.

Hãng taxi thứ hai có giá như sau : Mỗi km tính giá 14 nghìn đồng.

a) Viết công thức tính y (số tiền khách phải trả) theo x (số km xe chở khách) của mỗi hãng xe taxi.

b) Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng vừa tìm ở câu a.

Phương pháp

a) Dựa vào dữ kiện đề bài để viết công thức.

b) Kiểm tra hệ số của hai hàm số.

Lời giải

a) Hãng xe thứ nhất:

Giá mở cửa của hãng xe thứ nhất là: 10 (nghìn đồng)

Sau đó, mỗi km giá 12 (nghìn đồng) nên x km có giá $12x$ (nghìn đồng).

Vậy công thức tính số tiền khách phải trả theo số km xe chở khách của hãng xe thứ nhất là: $y = 10 + 12x = 12x + 10$ (nghìn đồng)

Hãng xe thứ hai:

Hãng xe thứ hai mỗi km giá 14 (nghìn đồng) nên x km có giá $14x$ (nghìn đồng).

Vậy công thức tính số tiền khách phải trả theo số km xe chở khách của hãng xe thứ hai là: $y = 14x$ (nghìn đồng)

b) Ta có hai hàm số: $y = 12x + 10$ và $y = 14x$

Vì $12 \neq 14$ nên hai đường thẳng đó cắt nhau.

Bài 8. Cho ba đường thẳng $d_1 : y = x + 2$, $d_2 : y = 3x + 2$ và $d_3 : y = (4 - m)x + 1 + m$.

- Vẽ các đường thẳng d_1 , d_2 trong cùng một hệ trục tọa độ.
- Tìm giao điểm A của hai đường thẳng d_1 và d_2 .
- Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d_3 đi qua điểm A .

Phương pháp

- Tìm hai điểm thuộc d_1 và d_2 để vẽ đồ thị hàm số.
- Viết phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 . Thay x tìm được để tìm y .
- Thay tọa độ điểm A vào d_3 để tìm m .

Lời giải

a)

* $y = x + 2$:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$ có $A(0; 2)$

Cho $y = 0 \Rightarrow x = -2$ có $B(-2; 0)$

Đường thẳng AB là đường thẳng $d_1 : y = x + 2$.

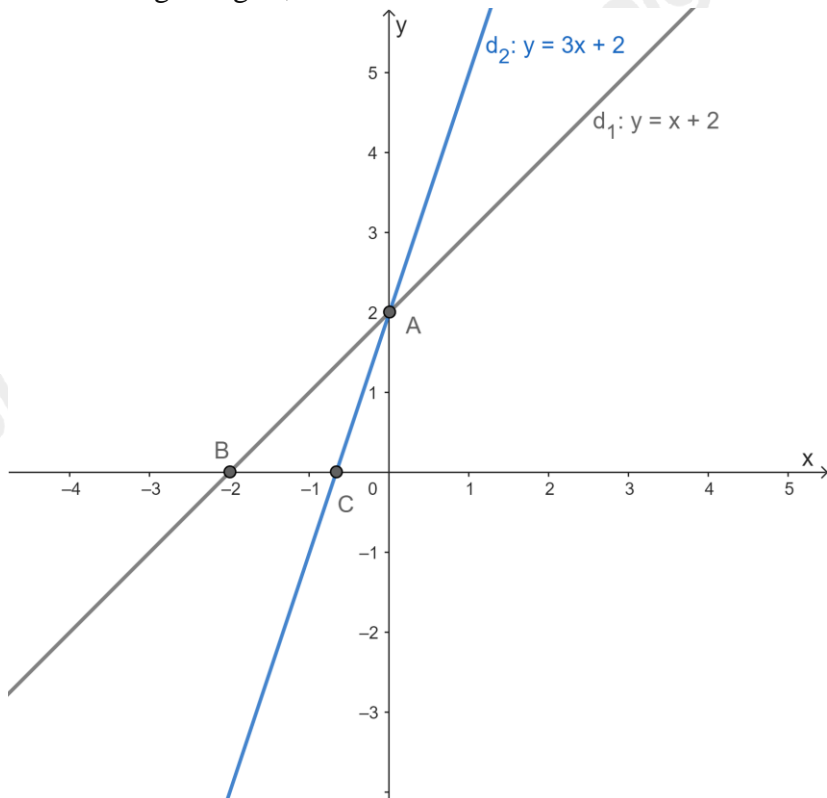
* $y = 3x + 2$:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$ có $A(0; 2)$

Cho $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$ có $C(\frac{-2}{3}; 0)$

Đường thẳng AC là đường thẳng $d_2 : y = 3x + 2$.

Ta có đường thẳng d_1, d_2 :



- Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 :

$$x + 2 = 3x + 2$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

Thay $x = 0$ vào d_1 , ta có: $y = 0 + 2 = 2$.

Vậy tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng d_1 và d_2 là $A(0; 2)$.

c) Vì đường thẳng d_3 đi qua điểm A, thay tọa độ điểm A vào d_3 , ta có:

$$2 = (4 - m).0 + 1 + m$$

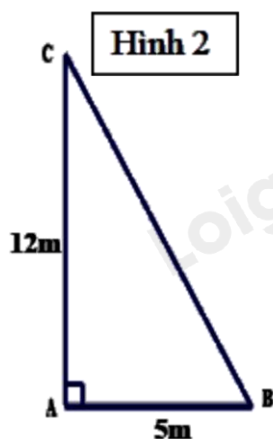
$$2 = 1 + m$$

$$m = 1$$

Vậy $m = 1$ thì đường thẳng d_3 đi qua điểm A.

Bài 9.

a) Một cây cao 12m mọc cạnh bờ sông. Trên đỉnh cây có một con chim đang đậu và chuẩn bị sà xuống bắt con cá trên mặt nước (như hình 1 và được mô phỏng như hình 2). Hỏi con chim sẽ bay một đoạn ngắn nhất bằng bao nhiêu mét thì bắt được con cá? (Biết con cá cách gốc cây 5m và nước cao mấp mé bờ sông)



b) Cho tam giác ABC , đường cao AH . Biết $AC = 15$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Phương pháp

a) Áp dụng định lý Pythagore để tính.

b) Áp dụng định lý Pythagore để tính các cạnh và xác định loại tam giác.

Lời giải

a) Để con chim bay một đoạn ngắn nhất bắt được con cá thì con chim phải bay một khoảng bằng với đoạn thẳng BC.

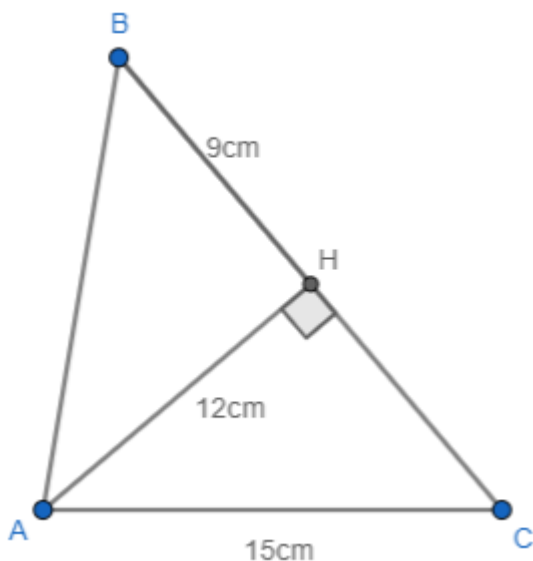
Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$\Rightarrow BC = 13(m)$$

Vậy con chim sẽ bay một đoạn ngắn nhất bằng 13 mét thì bắt được con cá.

b)



Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ABH, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 9^2 = 225$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{225} = 15(\text{cm})$$

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác vuông ACH, ta có:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 15^2 - 12^2 = 81$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{81} = 9(\text{cm})$$

Suy ra $BC = 9 + 9 = 18(\text{cm})$.

Vì $AB = AC = 15$ nên tam giác ABC cân tại A.

Vì $AB^2 + AC^2 = 15^2 + 15^2 = (15\sqrt{2})^2 \neq 18^2 = BC^2$ nên tam giác ABC không vuông (theo định lí Pythagore đảo).

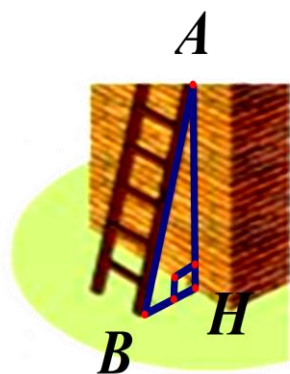
Vậy tam giác ABC cân tại A.

Bài 10. Một chiếc thang có chiều dài $AB = 3,7\text{m}$ đặt cách một bức tường khoảng cách $BH = 1,2\text{m}$.

a) Tính chiều cao AH.

b) Khoảng cách đặt thang cách chân tường là BH có “an toàn” không? Biết rằng khoảng cách “an toàn” khi

$$2,0 < \frac{AH}{BH} < 2,2 \quad (\text{xem hình vẽ}).$$



$$\begin{aligned} AB &= 3,7m \\ BH &= 1,2m \end{aligned}$$

Phương pháp

a) Sử dụng định lý Pythagore để tính AH.

b) Tính tỉ số $\frac{AH}{BH}$. Kiểm tra xem $2,0 < \frac{AH}{BH} < 2,2$ hay không.

Lời giải

a) Vì bức tường và mặt đất vuông góc với nhau nên tam giác ABH vuông tại H.

Áp dụng định lý Pythagore vào tam giác vuông ABH, ta có:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 3,7^2 - 1,2^2 = 12,25$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{12,25} = 3,5(m)$$

b) Ta có: $\frac{AH}{BH} = \frac{3,5}{1,2} \approx 2,9 > 2,2$. Do đó khoảng cách đặt thang cách chân tường là BH không “an toàn”.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD có AC vuông góc với AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh $AF = FC$.

b) Chứng minh tứ giác AECF là hình thoi.

c) Chứng minh AC, BD, EF đồng quy.

Phương pháp

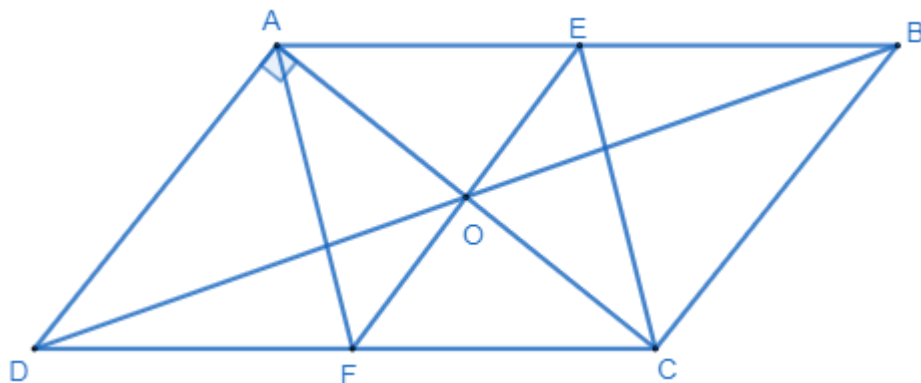
a) Sử dụng tính chất của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông ACD để chứng minh.

b) Chứng minh AECF có cặp cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Mà $AF = FC$ (hai cạnh kề bằng nhau) nên AECF là hình thoi.

c) Chứng minh giao điểm của AC và EF trùng với giao điểm của AC và BD.

Lời giải



a) Ta có ABCD là hình bình hành nên $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, $AD = BC$ và $AB = CD$.

Xét tam giác ACD có AC vuông góc với AD nên tam giác ACD vuông tại A.

F là trung điểm của CD nên AF là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền CD của tam giác ACD.

Do đó $AF = \frac{1}{2}CD = CF$ (F là trung điểm của CD) (đpcm)

b) Ta có $AB \parallel CD$ nên $AE \parallel CF$ ($E \in AB, F \in CD$)

$AE = \frac{1}{2}AB$ (E là trung điểm của AB)

$CF = \frac{1}{2}CD$ (F là trung điểm của CD)

Mà $AB = CD$ (cmt)

$\Rightarrow AE = CF$.

Xét tứ giác AECF có: $AE \parallel CF$ (cmt), $AE = CF$ (cmt) nên tứ giác AECF là hình bình hành.

Mà $AF = CF$ (cmt) \Rightarrow AECF là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi) (đpcm).

c) Gọi O là giao điểm của AC và EF, khi đó O là trung điểm của AC.

Vì ABCD là hình bình hành nên giao điểm của AC và BD là trung điểm của AC và BD.

Mà O là trung điểm của AC (cmt) nên O là giao điểm của AC và BD.

Mà O là giao điểm của AC và BD.

Vậy AC, BD và EF đồng quy tại điểm O (đpcm).

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại C. Gọi D là trung điểm của AB, kẻ DM vuông góc với AC ($M \in AC$). Gọi E là điểm đối xứng với D qua BC, DE cắt BC tại N.

a) Chứng minh tứ giác CMDN là hình chữ nhật.

b) Tứ giác BDCE là hình gì? Vì sao?

c) Chứng minh $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CMDN}$.

d) Tam giác ABC cần có thêm điều kiện gì để tứ giác ABEC là hình thang cân?

Phương pháp

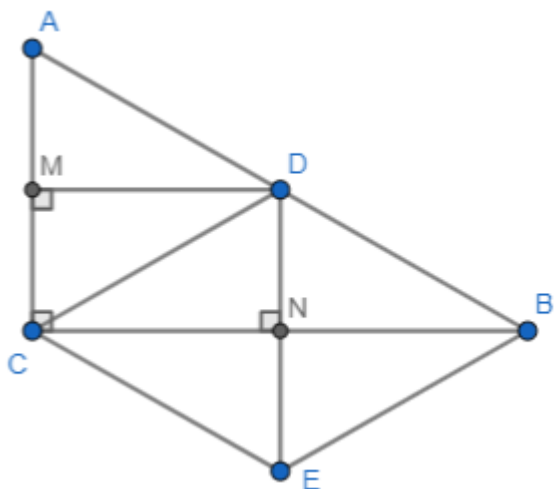
a) Chứng minh tứ giác CMDN có 3 góc vuông.

b) Chứng minh BDCE là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Sử dụng công thức tính diện tích tam giác và diện tích hình chữ nhật để chứng minh.

d) Dựa vào tính chất của hình thang cân để suy ra điều kiện cần của tam giác ABC để ABEC là hình thang cân.

Lời giải



a) Ta có DM vuông góc với AC nên $M = 90^\circ$.

Ta có E là điểm đối xứng với D qua BC nên $DE \perp BC$ tại N suy ra $N = 90^\circ$.

Xét tứ giác CMDN có:

$$C = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$M = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

$$N = 90^\circ \text{ (cmt)}$$

\Rightarrow CMDN là hình chữ nhật (đpcm)

$\Rightarrow CM \parallel DN, CM = DN$ (hai cạnh đối tương ứng)

b) Xét tứ giác ADEC có:

$AC \parallel DN$ (vì $CM \parallel DN$)

$$AC = DN \text{ (vì } \frac{1}{2} AC = CM = DN = \frac{1}{2} DE)$$

\Rightarrow ADEC là hình bình hành $\Rightarrow AD \parallel CE$ và $AD = CE$.

Mà $AD = DB$ (D là trung điểm của AB)

$$\Rightarrow CE = DB$$

Xét tứ giác BDCE có:

$DB \parallel CE$ (do $AD \parallel CE$)

$$DB = CE \text{ (cmt)}$$

\Rightarrow BDCE là hình bình hành.

\Rightarrow Giao điểm của DE và BC là trung điểm của mỗi đường.

Mà $DE \perp BC \Rightarrow$ BDCE là hình thoi (đpcm).

$$\text{c) Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC, S_{CMDN} = CM \cdot CN = \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BC = \frac{1}{4} AC \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CMDN}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BC}{\frac{1}{4} AC \cdot BC} = 2 \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{CMDN} \text{ (đpcm)}$$

d) Ta có $AB \parallel CE$ nên ABEC là hình thang.

Để ABEC là hình thang cân thì $AC = BE$.

$$\text{Mà } BE = BD = AD \Rightarrow AC = AD = DC$$

\Rightarrow Tam giác ACD đều suy ra $A = 60^\circ$.

Vậy tam giác ABC phải vuông tại C và có $A = 60^\circ$ thì ABEC là hình thang cân.

Bài 13. Cho tam giác MNP vuông cân tại M. Gọi Q là điểm đối xứng của M qua NP.

- Chứng minh rằng tứ giác MNQP là hình vuông;
- Trên tia đối của các tia PQ và MP lần lượt lấy điểm A và B sao cho $QA = MB$. Chứng minh rằng tam giác BNA là tam giác vuông cân;
- Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác IPN là tam giác cân.
- Chứng minh 3 điểm Q, M, I thẳng hàng.

Phương pháp

a) Chứng minh MNQP có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên MNQP là hình bình hành.

Hình bình hành MNQP có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

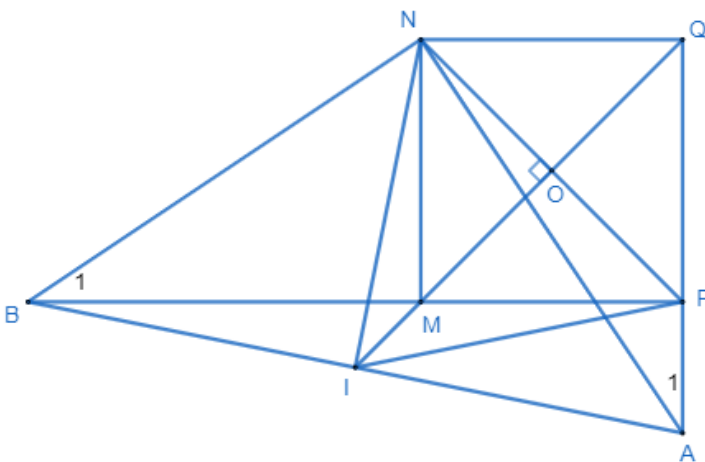
Hình thoi MNQP có một góc vuông nên là hình vuông.

b) Chứng minh $\triangle ANQ = \triangle BNM \Rightarrow AN = BN$ và chứng minh $N = 90^\circ$ suy ra tam giác BNA vuông cân tại N.

c) Dựa vào tính chất của đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông để chứng minh $IN = IP$.

d) Chứng minh IO và MQ đều là đường trung trực của NP nên Q, M, I thẳng hàng.

Lời giải



a) Gọi O là giao điểm của MQ và NP.

Ta có Q là điểm đối xứng với M qua NP nên $MQ \perp NP$ tại O và $MO = OQ$ hay O là trung điểm của MQ. Xét tam giác MNP vuông cân tại M có MO là đường cao ($MO \perp NP$), ta có MO đồng thời là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác MNP nên $MO = NO = OP$ hay O là trung điểm của NP.

Xét tứ giác MNQP có:

O là giao điểm của hai đường chéo NP và MQ

O là trung điểm của MQ và O là trung điểm của NP

\Rightarrow MNQP là hình bình hành.

$MN = MP$ (tam giác MNP vuông cân tại M)

\Rightarrow MNQP là hình thoi.

$M = 90^\circ$ nên MNQP là hình vuông.

b) Xét tam giác ANQ và tam giác BNM có:

$MN = NQ$ (hai cạnh hình vuông)

$Q = M = 90^\circ$ (MNQP là hình vuông)

$$QA = MB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ANQ = \Delta BNM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AN = BN \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$B_1 = A_1 \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Suy ra tam giác ABN cân tại N (1)

$$\text{Xét tam giác BMN có } M = 90^\circ \text{ nên } B_1 + BNM = 90^\circ.$$

Ta có $MN \parallel AQ$ (do $MN \parallel PQ$) nên $MNA = A_1$ (hai góc so le trong)

$$\text{Mà } A_1 = B_1 \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow BNM + MNA = 90^\circ \text{ hay } ANB = 90^\circ \text{ suy ra tam giác ANB là tam giác vuông (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác ANB vuông cân tại N (đpcm)

c) Xét tam giác ANB vuông cân tại N có I là trung điểm của AB nên NI là đường trung tuyến của tam giác

$$ANB \Rightarrow NI = \frac{1}{2} AB.$$

Xét tam giác APB có $P = 90^\circ$ nên tam giác APB là tam giác vuông tại P, I là trung điểm của AB nên PI là

$$\text{đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác APB} \Rightarrow PI = \frac{1}{2} AB.$$

$$\text{Do đó } NI = PI \left(= \frac{1}{2} AB \right)$$

Suy ra tam giác PIN cân tại I. (đpcm)

d) Ta có MQ vuông góc với NP và đi qua trung điểm của NP nên MQ là đường trung trực của NP.

Tam giác PIN cân tại I, O là trung điểm của NP nên IO là đường trung trực của NP.

$$\Rightarrow IO \equiv MQ \text{ hay I, M, Q thẳng hàng (đpcm)}$$

Phương pháp

Sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ nâng cao.

Lời giải

a) Ta có:

$$B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 + 1 + 2z - 2y - 2z - 2xy + 2xz - 2yz) + (y^2 + z^2 + 4 + 2yz - 2y - 4z) + (z^2 - 2z + 1) + 1996$$

$$= (x + y + z - 1)^2 + (y + z - 2)^2 + (z - 1)^2 + 1996 \geq 1996 \forall x, y, z$$

$$\text{vì } \begin{cases} (x - y + z - 1)^2 \geq 0 \forall x, y, z \\ (y + z - 2)^2 \geq 0 \forall y, z \\ (z - 1)^2 \geq 0 \forall z \end{cases}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y + z - 1)^2 = 0 \\ (y + z - 2)^2 = 0 \\ (z - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 1 \\ y + 1 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $\text{Min}B = 1996$ khi $x = 1; y = 1; z = 1$.

b) Tính GTLN của biểu thức $N = \frac{2x^2 + 4x + 10}{x^2 + 2x + 3}$.

Bài 15*. Cho $a + b = 1$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$M = a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b).$$

Phương pháp

Biến đổi biểu thức thành biểu thức chứa $a + b$ để rút gọn.

Lời giải

Ta có:

Thay $a + b = 1$ và biến đổi M , ta được:

$$\begin{aligned} M &= a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2 \cdot 1 \\ &= a^2 - ab + b^2 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2 \\ &= a^2 + b^2 - ab + 3ab(a^2 + b^2 + 2ab) \\ &= a^2 + b^2 - ab + 3ab(a + b)^2 \\ &= a^2 + b^2 - ab + 3ab \\ &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= (a + b)^2 = 1 \end{aligned}$$

Vậy với $a + b = 1$ thì $M = 1$.