ĐỀ THI GIỮA KÌ II – Đề số 4

Môn: Toán - Lớp 11

Bộ sách Chân trời sáng tạo

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Phần trắc nghiệm

Câu 1. B	Câu 2. B	Câu 3. A	Câu 4. A	Câu 5. D	Câu 6. A	Câu 7. D
Câu 8. B	Câu 9. D	Câu 10. C	Câu 11. B	Câu 12. A	Câu 13. A	Câu 14. B
Câu 15. A	Câu 16. C	Câu 17. C	Câu 18. D	Câu 19. B	Câu 20. C	Câu 21. C
Câu 22. D	Câu 23. A	Câu 24. A	Câu 25. C	Câu 26. A	Câu 27. A	Câu 28. D
Câu 29. B	Câu 30. B	Câu 31. D	Câu 32. B	Câu 33. A	Câu 34. C	Câu 35. C

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $4^{-6}=6^{-4}$.

B. $4^{-6}=\frac{1}{4^6}$.

C. $4^{-6}=\frac{1}{6^4}$.

D. $4^{-6}=(-4)^6$.

Phương pháp

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý khác 0, ta có $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

Lời giải

$4^{-6}=\frac{1}{4^6}$

Đáp án B.

Câu 2: Chọn đáp án đúng.

Cho số thực a và số nguyên dương n $(n\ge 2)$. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu:

A. $a^n=b$.

B. $b^n=a$.

C. $a.n=b$.

D. $a.b=n$.

Phương pháp

Cho số thực a và số nguyên dương n $(n\ge 2)$. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n=a$.

Lời giải

Cho số thực a và số nguyên dương n $(n\ge 2)$. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n=a$.

Đáp án B.

Câu 3: Chọn đáp án đúng:

A. $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}=1-\sqrt{5}$.

B. $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}=-1-\sqrt{5}$.

C. $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}=-1+\sqrt{5}$.

D. $\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}=1+\sqrt{5}$.

Phương pháp

$\sqrt[n]{a^n}=a$ khi n lẻ (với các biểu thức đều có nghĩa).

Lời giải

$\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{5}\right)^3}=1-\sqrt{5}$.

Đáp án A.

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\left(9^{3+\sqrt{3}}-9^{\sqrt{3}-1}\right).3^{-2\sqrt{3}}$ được kết quả là:

A. $\frac{6560}{9}$.

B. $\frac{6562}{9}$.

C. $\frac{6560}{3}$.

D. $\frac{6562}{3}$.

Phương pháp

Với a là số thực dương, α,β là những số thực bất kì thì: $\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha\beta}, a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$.

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý khác 0, ta có $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

Lời giải

$$\left(9^{3+\sqrt{3}}-9^{\sqrt{3}-1}\right).3^{-2\sqrt{3}}=\left(3^{2\left(3+\sqrt{3}\right)}-3^{2\left(\sqrt{3}-1\right)}\right).3^{-2\sqrt{3}}=3^{6+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}-3^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}}=3^6-3^{-2}=3^6-\frac{1}{3^2}=\frac{6560}{9}$$

Đáp án A.

Câu 5: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^8}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$

A. a^2b^2.

B. ab.

C. a^3b^4.

D. a^4b^3.

Phương pháp

$\sqrt[n]{a^n}=|a|$ nếu n là số chẵn.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ (các biểu thức đều có nghĩa)

Lời giải

$$\frac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^8}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\frac{\left(\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4\right)^2}{\sqrt[6]{\left(a^2b\right)^6}}=\frac{\left(a^3b^2\right)^2}{a^2b}=\frac{a^6b^4}{a^2b}=a^4b^3$$

Đáp án D.

Câu 6: Chọn đáp án đúng.

A. $\ln e^2=2$.

B. $\ln e^2=e^2$.

C. $\ln e^2=e$.

D. $\ln e^2=\frac{1}{e^2}$.

Phương pháp

Với số thực dương a, b và $a\ne 1$ thì:

+ $\log_a a^b=b$

+ $\log_e b$ được viết là ln b

Lời giải

$\ln e^2=2$

Đáp án A.

Câu 7: Chọn đáp án đúng.

Cho a, b là các số thực dương. Giá trị của $\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{a}$ bằng:

A. $\ln(ab)$.

B. $\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

C. 1.

D. 0.

Phương pháp

Với số thực dương a, b, c và $a\ne 1$ thì:

+ $\log_e b$ được viết là ln b.

+ $\log_a 1=0$, $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

Lời giải

$\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{a}=\ln\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{a}\right)=\ln 1=0$

Đáp án D.

Câu 8: Chọn đáp án đúng.

Cho $a>0,a\ne 1,b>0$. Với mọi số nguyên dương $n\ge 2$ ta có:

A. $\log_a\sqrt[n]{b}=n\log_a b$.

B. $\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$.

C. $\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_b a$.

D. $\log_a\sqrt[n]{b}=n\log_b a$.

Phương pháp

Cho $a>0, a\ne 1, b>0$. Với mọi số nguyên dương $n\ge 2$ ta có $\log_a \sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$.

Lời giải

Cho $a>0, a\ne 1, b>0$. Với mọi số nguyên dương $n\ge 2$ ta có $\log_a \sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$.

Đáp án B.

Câu 9: Cho $\log_a b=4$. Giá trị của $\log_a\left(a^3b^2\right)$ bằng:

A. 12.

B. 13.

C. 14.

D. 11.

Phương pháp

+ Với a, b là số thực dương và $a\ne 1$ thì $\log_a a^\alpha=\alpha, \log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$

+ Với $0<a\ne 1, b, c>0$ thì $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

Lời giải

$\log_a\left(a^3b^2\right)=\log_a a^3+\log_a b^2=3+2\log_a b=3+2.4=11$

Đáp án D.

Câu 10: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^3b^2=1000$. Giá trị của biểu thức $P=3\log a+2\log b$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Phương pháp

+ Với a, b là số thực dương và $a\ne 1$ thì $\log_a a^\alpha=\alpha, \log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$.

+ Với $0<a\ne 1, b, c>0$ thì $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

Lời giải

$P=3\log a+2\log b=\log a^3+\log b^2=\log\left(a^3b^2\right)=\log 1000=\log 10^3=3$

Đáp án C.

Câu 11: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên $(0;+\infty)$?

A. $y=\ln 2x$.

B. $y=\log_{\frac{1}{\pi}} x$.

C. $y=\log_{1+\sqrt{3}} x$.

D. $y=\log x$.

Phương pháp

Với $0<a<1$ thì hàm số $y=\log_a x\,(a>0, a\ne 1)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Vì $0<\frac{1}{\pi}<1$ nên hàm số $y=\log_{\frac{1}{\pi}} x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Đáp án B.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=3^x$.

B. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

C. Cả A và B đều đúng.

D. Cả A và b đều sai.

Phương pháp

Với $a>1$ thì hàm số $y=a^{x}\left(a>0,a\ne 1\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Vì $3>1$ nên hàm số $y=3^{x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp án A.

Câu 13: Đồ thị hàm số $y=6^{2x}$ luôn đi qua điểm nào dưới đây?

A. (0; 1).

B. (0; -1).

C. (0; 6).

D. $\left(0;\frac{1}{6}\right)$.

Phương pháp

Đồ thị hàm số $y=a^{x}\left(a>0,a\ne 1\right)$ luôn đi qua điểm (0; 1).

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=6^{2x}$ luôn đi qua điểm (0; 1).

Đáp án A.

Câu 14: Chọn đáp án đúng.

Hàm số $y=\log x$ có cơ số là:

A. 1.

B. 10.

C. e.

D. Cả A, B, C đều sai.

Phương pháp

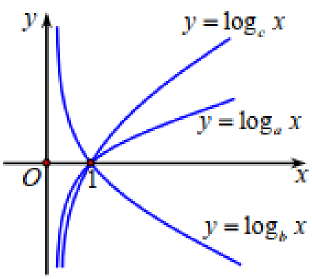
Hàm số $y=\log_{a}x\left(a>0,a\ne 1\right)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

Lời giải

Hàm số $y=\log x$ có cơ số là 10.

Đáp án B.

Câu 15: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_{a}x,y=\log_{b}x,y=\log_{c}x$ thể hiện ở hình vẽ dưới đây.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b<c<a$.

B. $b<a<c$.

C. $a<b<c$.

D. $a < c < b$.

Phương pháp

Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x\,(a > 0, a \ne 1)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Nếu $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x\,(a > 0, a \ne 1)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta thấy hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên $b < 1$.

Hàm số $y = \log_a x, y = \log_c x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $a > 1, c > 1$.

Xét tại một điểm $x > 1$ thì: $\log_c x > \log_a x \Rightarrow \log_c x > \dfrac{1}{\log_x a} \Rightarrow \log_c x.\log_x a > 1 \Rightarrow a > c$

Do đó, $b < c < a$.

Đáp án A.

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \ln(x-1)$ là:

A. $D = [1;3]$.

B. $D = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

C. $D = (1;3)$.

D. $D = (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$.

Phương pháp

Hàm số $y = \ln u(x)$ xác định khi $u(x) > 0$.

Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$ xác định khi $u(x) > 0$.

Lời giải

Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \ln(x-1)$ xác định khi $\begin{cases} 3-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (1;3)$.

Đáp án C.

Câu 17: Bất phương trình $6^x \ge b$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi:

A. $b > 0$.

B. $b \ge 0$.

C. $b \le 0$.

D. $b \ne 0$.

Phương pháp

Bất phương trình $a^x \ge b\,(0 < a \ne 1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $b \le 0$.

Lời giải

Bất phương trình $6^x \ge b$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $b \le 0$.

Đáp án C.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x > \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^3$ là:

A. $S = (-\infty;2)$.

B. $S = (-\infty;3]$.

C. $S=(3;+\infty)$.

D. $S=(-\infty;3)$.

Phương pháp

Với $0<a<1$ thì $a^{u(x)}>a^{v(x)}\Leftrightarrow u(x)<v(x)$.

Lời giải

$\left(\frac{1}{\pi}\right)^x>\left(\frac{1}{\pi}\right)^3\Leftrightarrow x<3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(-\infty;3)$

Đáp án D.

Câu 19: Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 2$ là:

A. $S=(-\infty;100]$.

B. $S=[100;+\infty)$.

C. $S=(100;+\infty)$.

D. $S=(-\infty;100)$.

Phương pháp

Bất phương trình $\log_a x\ge b\,(a>1)\Leftrightarrow x\ge a^b$.

Lời giải

$\log x\ge 2\Leftrightarrow x\ge 10^2\Leftrightarrow x\ge 100$ (thỏa mãn)

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[100;+\infty)$.

Đáp án B.

Câu 20: Cho phương trình $4^x+2^{x+2}-5=0$. Đặt $t=2^x$ ta được phương trình là:

A. $t^2+6t-5=0$.

B. $t^2+t-5=0$.

C. $t^2+4t-5=0$.

D. $t^2+2t-5=0$.

Phương pháp

Phương trình hàm số mũ.

Cho a, b là số thực dương và α,β là những số thực bất kì. Khi đó, $\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha.\beta}, a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta}$

Lời giải

$4^x+2^{x+2}-5=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+4.2^x-5=0$ (1)

Đặt $t=2^x$ thì phương trình trở thành: $t^2+4t-5=0$.

Đáp án C.

Câu 21: Phương trình $\log_3^2 x+5\log_3 x+6=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 2 nghiệm.

D. Vô số nghiệm.

Phương pháp

Với $a>0, a\ne 1$ ta có: $\log_a u(x)=b\Leftrightarrow u(x)=a^b$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0$

Đặt $\log_3 x = t$ thì phương trình $\log_3^2 x + 5\log_3 x + 6 = 0$ trở thành:

$$t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = -3 \end{array}\right.$$

Với $t = -2$ thì $\log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$ (thỏa mãn)

Với $t = -3$ thì $\log_3 x = -3 \Leftrightarrow x = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Đáp án C.

Câu 22: Bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} - 3^{2x-21} > 0$ có nghiệm là:

A. $x < \dfrac{-7}{2}; x > 4$.

B. $x < 4$.

C. $x > \dfrac{-7}{2}$.

D. $\dfrac{-7}{2} < x < 4$.

Phương pháp

Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} - 3^{2x-21} > 0 \Leftrightarrow 3^{-(2x^2-3x-7)} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 7 > 2x - 21 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 28 < 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+7)(x-4) < 0 \Leftrightarrow \frac{-7}{2} < x < 4$$

Đáp án D.

Câu 23: Công thức $M = M_o\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_o là khối lượng ban đầu, T là chu kì bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kì, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng 200g radon ban đầu, sau 16 ngày chỉ còn 11g. Chu kì bán rã của radon bằng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười):

A. 3,8 ngày.

B. 4 ngày.

C. 3,5 ngày.

D. 4,2 ngày.

Phương pháp

Phương trình $a^x = b\,(a > 0, a \ne 1)$ với $b > 0$ có nghiệm là $x = \log_a b$

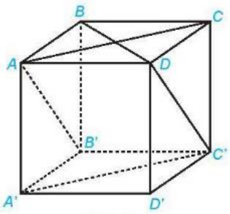
Lời giải

Với $M_o = 200g, t = 16, M = 11g$ thay vào công thức $M = M_o\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ ta có:

$$11 = 200\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{T}} \Leftrightarrow \frac{16}{T} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{11}{200} = \log_2\frac{200}{11} \Leftrightarrow T = \frac{16}{\log_2\frac{200}{11}} \approx 3,8 \text{ (ngày)}$$

Đáp án A.

Câu 24: Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có các mặt là các hình vuông. Góc giữa hai đường thẳng AA’ và CD bằng:



A. 90^0.

B. 60^0.

C. 30^0.

D. 70^0.

Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a’ và b’ cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$.

Lời giải

Vì AB//CD nên $(AA',CD) = (AA',AB) = 90^0$

Đáp án A.

Câu 25: Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm I bất kì thuộc cạnh AC. Qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại M. Qua I kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD tại N. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng AB và CD là:

A. (IM, MN).

B. (IN, NM).

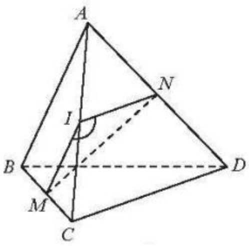
C. (IM, IN).

D. (IM, IC).

Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a’ và b’ cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$.

Lời giải



Vì MI//AB, IN//CD nên $(AB,CD) = (IM,IN)$.

Đáp án C.

Câu 26: Cho hình chóp S. ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD. Góc giữa hai đường thẳng MN và SC bằng:

A. 90^0.

B. 60^0.

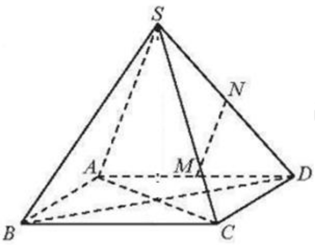
C. 30^0.

D. 70^0.

Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$.

Lời giải



Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD nên MN là đường trung bình của tam giác SAD. Do đó, MN//AS. Suy ra, $(MN,SC)=(SA,SC)=SAC$.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2$

Vì $AC^2=SA^2+AC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S (định lí Pythagore đảo)

Do đó, $ASC=90^0$. Vậy $(MN,SC)=90^0$.

Đáp án A.

Câu 27: Cho hình chóp S. ABCD với đáy ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I, J lần lượt thuộc các cạnh SC, BC sao cho tam giác IJC là tam giác đều. Khi đó, góc giữa hai đường thẳng IJ và AD bằng:

A. 60^0.

B. 90^0.

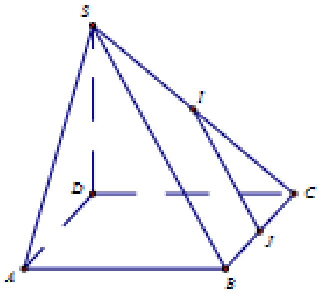
C. 120^0.

D. 70^0.

Phương pháp

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b; kí hiệu (a,b) hoặc $(a;b)$.

Lời giải



Tứ giác ABCD có: $AB=BC=CD=DA$ nên tứ giác ABCD là hình thoi. Do đó, AD//BC.

Suy ra: $(IJ,AD)=(IJ,BC)=CJI$

Tam giác IJC là tam giác đều nên $IJC = 60^0$. Do đó, góc giữa hai đường thẳng IJ và AD bằng 60^0.

Đáp án A.

Câu 28: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $SA \perp BC$.

B. $SA \perp AC$.

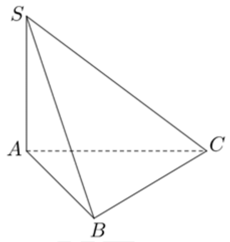
C. $SA \perp AB$.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Phương pháp

Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC)$ và $AB, BC, CA \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$, $SA \perp AC$, $SA \perp AB$.

Đáp án D.

Câu 29: Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có $AA' \perp (ABCD)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. (ABCD)$\perp$ (A’B’C’D).

B. $BB' \perp (ABCD)$.

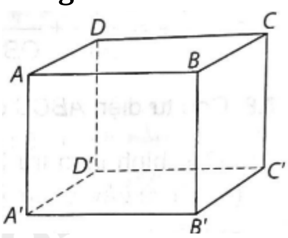
C. Cả A và B đều đúng.

D. Cả A và B đều sai.

Phương pháp

Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải



Vì $AA' \perp (ABCD)$ và AA’//BB’ nên $BB' \perp (ABCD)$

Đáp án B.

Câu 30: Trong không gian, cho điểm A và mặt phẳng (P). Mệnh nào dưới đây đúng?

A. Có đúng hai đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

B. Có đúng một đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

C. Không tồn tại đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

D. Có vô số đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Phương pháp

Có đúng một đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Lời giải

Có đúng một đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P).

Đáp án B.

Câu 31: Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc hai đường thẳng trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với tất cả các đường thẳng thuộc mặt phẳng (P).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với một đường thẳng trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng bất kì trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).

D. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).

Phương pháp

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).

Lời giải

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng (P) thì d vuông góc với (P).

Đáp án D.

Câu 32: Cho tứ diện ABCD có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D. Gọi I là trung điểm của BC. Kẻ $AH \perp DI\left(H \in DI\right)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là:

A. I.

B. H.

C. D.

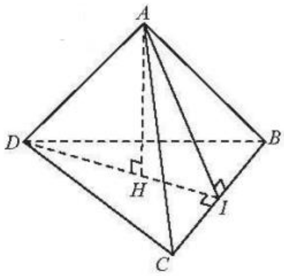
D. C.

Phương pháp

+ Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp \left(P\right)$.

+ Cho mặt phẳng (P). Xét một điểm M tùy ý trong không gian. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P). Gọi M’ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, điểm M’ được gọi là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P).

Lời giải



Vì tam giác ABC cân tại A nên AI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao. Do đó, $AI \perp BC$.

Vì tam giác DBC cân tại D nên DI là đường trung tuyến đồng thời là đường cao. Do đó, $DI \perp BC$.

Ta có: $AI \perp BC$, $DI \perp BC$, DI và AI cắt nhau tại I và nằm trong mặt phẳng (AID) nên $BC \perp \left(AID\right)$. Mà $AH \subset \left(ADI\right) \Rightarrow AH \perp CB$

Lại có: $AH \perp DI$, DI và BC cắt nhau tại I và nằm trong mặt phẳng (BCD). Do đó, $AH \perp \left(BCD\right)$. Do đó, hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là điểm H.

Đáp án B.

Câu 33: Cho hình chóp S. ABC có $SA \perp \left(ABC\right)$, M là trung điểm của BC. Tam giác ABC cân tại A. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp SB$.

B. $BC \perp SM$.

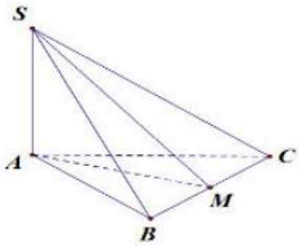
C. $SA \perp BC$.

D. $BC \perp AM$.

Phương pháp

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC), BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Tam giác ABC cân tại A nên AM là đường trung tuyến đồng thời là đường cao.

Do đó, $BC \perp AM$

Vì $SA \perp BC$, $BC \perp AM$, SA và AM cắt nhau tại A và nằm trong mặt phẳng (SAM) nên $BC \perp (SAM)$, mà $SM \subset (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Tam giác SBC có $BC \perp SM$ nên BC không thể vuông góc với SB. Do đó, câu A sai.

Đáp án A.

Câu 34: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là:

A. A.

B. C.

C. O.

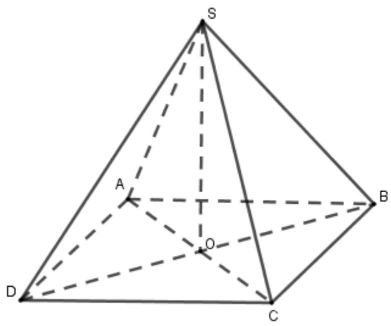
D. D.

Phương pháp

+ Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.

+ Cho mặt phẳng (P). Xét một điểm M tùy ý trong không gian. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P). Gọi M’ là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Khi đó, điểm M’ được gọi là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P).

Lời giải



Vì ABCD là hình thoi, O là giao điểm của AC và BD nên O là trung điểm của AC, O là trung điểm của BD.

Vì $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S. Do đó, SO là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của tam giác. Suy ra, $SO \perp AC$.

Vì $SB = SD$ nên tam giác SBD cân tại S. Do đó, SO là đường trung tuyến đồng thời là đường cao của tam giác. Suy ra, $SO \perp BD$.

Vì $SO \perp AC$, $SO \perp BD$ và BD và AC cắt nhau tại O và nằm trong mặt phẳng (ABCD) nên $SO \perp (ABCD)$.

Do đó, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là điểm O.

Đáp án C.

Câu 35: Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Góc giữa hai đường thẳng GK và AB bằng:

A. 45^0.

B. 60^0.

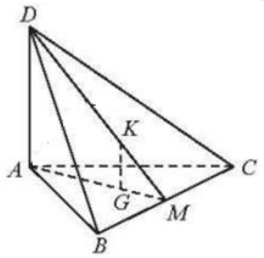
C. 90^0.

D. 70^0.

Phương pháp

Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải



Vì K là trọng tâm của tam giác DBC, DM là đường trung tuyến của tam giác DBC nên $\frac{MK}{MD} = \frac{1}{3}$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC, AM là đường trung tuyến của tam giác ABC nên $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$

Tam giác DMA có: $\frac{MK}{MD} = \frac{MG}{MA}\left(=\frac{1}{3}\right)$ nên GK//AD

Mà $AD \perp (ABC)$ suy ra $GK \perp (ABC)$. Mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow GK \perp AB$

Do đó, góc giữa hai đường thẳng GK và AB bằng 90^0.

Đáp án C.

Phần tự luận (3 điểm)

Bài 1. (1 điểm) Cho hàm số: $y = \log\left[(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m\right]$.

a) Với $m = 3$, hãy tìm tập xác định của hàm số trên.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số trên có tập xác định với mọi giá trị thực của x.

Phương pháp

Hàm số $y = \log u(x)$ xác định khi $u(x) > 0$.

Lời giải

a) Với $m = 3$ ta có: $y = \log(x^2 + 8x + 6)$.

Hàm số $y = \log(x^2 + 8x + 6)$ xác định khi $x^2 + 8x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -4 + \sqrt{10} \\ x < -4 - \sqrt{10} \end{array}\right.$

Vậy với $m = 3$ thì tập xác định của hàm số là: $D = \left(-\infty; -4 - \sqrt{10}\right) \cup \left(-4 + \sqrt{10}; +\infty\right)$.

b) Hàm số $y = \log\left[(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m\right]$ xác định với mọi giá trị thực của x khi và chỉ khi $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Trường hợp 1: Với $m = 2$ ta có: $f(x) = 6x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-2}{3}$.

Do đó, f(x) không xác định với mọi giá trị thực của x. Do đó, $m = 2$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Với $m \ne 2$.

Hàm số $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-2)2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -m^2 + 6m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ \left[\begin{array}{l} m < 3 - \sqrt{10} \\ m > 3 + \sqrt{10} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 + \sqrt{10}$$

Vậy với $m \in \left(3 + \sqrt{10}; +\infty\right)$ thì hàm số $y = \log\left[(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m\right]$ có tập xác định với mọi giá trị thực của x.

Bài 2. (1,5 điểm) Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ABCD)$, $AD = 2a, AB = BC = a$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác SBC là tam giác vuông.

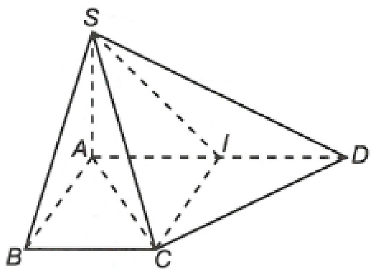
b) $CD \perp SC$.

Phương pháp

+ Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì $d \perp (P)$.

+ Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Lời giải



a) Vì $SA \perp (ABCD), BC \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Vì ABCD là hình thang vuông tại A và B nên $AB \perp BC$.

Ta có: $SA \perp BC$, $AB \perp BC$, SA và AB cắt nhau tại A và nằm trong mặt phẳng (SAB) nên $BC \perp (SAB)$.

Lại có, $SB \subset (SBC) \Rightarrow BC \perp SB$. Suy ra, tam giác SBC vuông tại B.

b) Gọi I là trung điểm của AD. Do đó, $AI = ID = \frac{1}{2}AD = a$

Tứ giác ABCI có: AI//BC (do tứ giác ABCD là hình thang vuông tại A, B), $AI = BC(= a)$ nên tứ giác ABCI là hình bình hành. Lại có: $BC = AB$ nên tứ giác ABCI là hình thoi. Mà $BAI = 90^0$ nên ABCI là hình vuông. Do đó, $AIC = 90^0 \Rightarrow CID = 90^0$

Tam giác CID có: $CID = 90^0, CI = ID(= a)$ nên tam giác CID vuông cân tại I.

Suy ra: $DCI = 45^0$.

Lại có: CA là phân giác góc ICB (do ABCI là hình vuông) nên $ACI = \frac{1}{2}ICB = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$

Suy ra: $ACD = ACI + ICD = 90^0$ hay $AC \perp CD$

Vì $SA \perp (ABCD), DC \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp DC$

Ta có: $AC \perp CD$, $SA \perp DC$, SA và AC cắt nhau tại A và nằm trong mặt phẳng (SAC) nên $DC \perp (SAC)$.

Mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$

Bài 3. (0,5 điểm) Cho phương trình $(4^x - 10.2^x + 16)\sqrt{\log_3 x^5 - m} = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình trên có đúng hai nghiệm phân biệt.

Phương pháp

+ Nếu $a > 0, a \ne 1$ thì $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$ (có thể thay $u(x) > 0$ bằng $v(x) > 0$)

+ Với $a > 0, a \ne 1$ ta có: $\log_a u(x) = b \Leftrightarrow u(x) = a^b$.

Lời giải

Điều kiện: $\log_3 x^5 \ge m > 0, x > 0$

$$(4^x - 10.2^x + 16)\sqrt{\log_3 x^5 - m} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x - 10.2^x + 16 = 0\ (1) \\ \log_3 x^5 - m = 0\ \ (2) \end{array} \right.$$

Giải phương trình (1): $(2^x)^2 - 10.2^x + 16 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)(2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x - 2 = 0 \\ 2^x - 8 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array} \right.$ (thỏa mãn)

Vì $m \in \mathbb{N}^*$ nên phương trình (2) luôn có nghiệm $x = \sqrt[5]{3^m}$. Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thì:

+ Trường hợp 1: $x = \sqrt[5]{3^m} = 1 \Rightarrow m = 0$ (loại)

+ Trường hợp 2: $x = \sqrt[5]{3^m} = 2 \Rightarrow 3^{\frac{m}{5}} = 2 \Rightarrow m = 5\log_3 2$ (loại)

+ Trường hợp 3: Phương trình đã cho chỉ nhận nghiệm $x = 3$ của phương trình (1) làm nghiệm, một nghiệm từ (2):

Khi đó, $\begin{cases} m = 5\log_3 x, x < 3 \\ 5\log_3 1 < m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < m < 5 \\ x = \sqrt[5]{3^m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \{1;2;3;4\} \\ x = \sqrt[5]{3^m} \end{cases}$

Suy ra, với $m \in \{1;2;3;4\}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \sqrt[5]{3^m}$, $x = 3$.

Vậy $m \in \{1;2;3;4\}$ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.