SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC VÀO 10
MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2023 – 2024
Thời gian: 120 phút

Câu 1:

a) Tính $A=\sqrt{4}+\sqrt{49}+\sqrt{64}$.

b) Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{4x}{x-1}$, với $x>0$ và $x\neq 1$.

c) Tìm giá trị của b để đường thẳng $y=2x+b-1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 2:

a) Giải phương trình $x^2+3x-10=0$.

b) Cho biết phương trình $x^2-5x+3=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1,x_2.

Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $T=\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{x_1^2+5x_2}$.

Câu 3:

a) Một cửa hàng kinh doanh xe đạp nhập về một lô hàng gồm hai loại: loại I có giá 2 triệu đồng/xe và loại II có giá 6 triệu dồng/xe. Biết rằng lô hàng nói trên có 50 xe với tổng số tiền mà cửa hàng phải thanh toán là 160 triệu đồng. Hỏi cửa hàng đã nhập về bao nhiêu xe loại I và bao nhiêu xe loại II?

b) Bạn An bỏ một viên bi đặc không thấm nước vào một lọ thủy tinh chứa nước dạng hình trụ có bán kinh đường tròn đáy bằng $1,5\text{ cm}$. Biết rằng khi viên bi chìm hoàn toàn trong nước thì nước trong lọ dâng lên thêm $0,5\text{ cm}$. Tính thể tích viên bi bạn An dã bỏ vào lọ thủy tinh (cho $\pi=3,14$; xem độ dày của lọ không dáng kể và nước trong lọ không thất thoát ra ngoài).

Câu 4: Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$, các đường cao $AD,BE,CF(D\in BC$, $E\in AC,F\in AB)$ cắt nhau tại H.

a) Chứng minh $AEHF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi O là trung diểm của đoạn thẳng BC,M là giao điểm của tia EF và tia CB. Chứng minh rằng $FAD=OFC$ và $OC^2=OD\cdot OM$.

c) Chứng minh rằng hai đường thẳng MH và AO vuông góc với nhau.

Câu 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=4\\ x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=x^2y^2-1\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1 (TH):

Phương pháp:

a) Khai căn và thực hiện phép tính.

b) Quy đồng và rút gọn.

c) Tìm giao điểm của đường thẳng và trục hoành từ đó thay vào đường thẳng để tìm giá trị b.

Cách giải:

a) Tính $A=\sqrt{4}+\sqrt{49}+\sqrt{64}$

$$\begin{aligned}
&A=\sqrt{4}+\sqrt{49}+\sqrt{64}\\
&A=\sqrt{2^2}+\sqrt{7^2}+\sqrt{8^2}\\
&A=2+7+8\\
&A=17
\end{aligned}$$

Vậy A = 17.

b) Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).\frac{4x}{x-1}$ với $x>0$ và $x\neq 1$.

Với $x>0,\ x\neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
&P=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).\frac{4x}{x-1}\\
&P=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}.\frac{4x}{x-1}\\
&P=\frac{x-1}{2\sqrt{x}}.\frac{2.2\left(\sqrt{x}\right)^2}{x-1}\\
&P=2\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Vậy với $x>0,\ x\neq 1$ thì $P=2\sqrt{x}$.

c) Tìm giá trị của b để đường thẳng $y=2x+b-1$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 => Đường thẳng d đi qua điểm A(1;0).

Thay x = 1 và y = 0 vào phương trình đường thẳng d ta có: $0=2.1+b-1\Leftrightarrow b+1=0\Leftrightarrow b=-1$.

Vậy b = -1.

Câu 2 (VD):

Phương pháp:

a) Tính Δ và suy ra nghiệm của phương trình.

b) Áp dụng hệ thức vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Cách giải:

a) Giải phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$

Ta có: $\Delta = 3^2 - 4.1.(-10) = 49 > 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{49}}{2} = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{49}}{2} = \dfrac{-3-7}{2} = -5 \end{array} \right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{2; -5\}$.

b) Cho biết phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{(x_1+1)(x_2+1)}{x_1^2 + 5x_2}$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên $x_1^2 - 5x_1 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 5x_1 - 3$.

Theo bài ra, ta có:

$$T = \frac{(x_1+1)(x_2+1)}{x_1^2 + 5x_2} = \frac{x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1}{5x_1 + 5x_2 - 3} = \frac{x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1}{5(x_1 + x_2) - 3}$$

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$

Suy ra: $T = \dfrac{3+5+1}{5.5-3} = \dfrac{9}{22}$.

Vậy $T = \dfrac{9}{22}$.

Câu 3 (VD):

Phương pháp:

a)

	Số xe	Số tiền mua xe
Loại I	x	2x
Loại II	50 – x	6(50 – x)

Vì tổng số tiền mà cửa hàng phải thanh toán là 160 triệu đồng nên ta tìm được phương trình.

b) Áp dụng công thức tính thể tích hình trụ: $\pi r^2 h$.

Cách giải:

a) Gọi số xe loại I cửa hàng nhập về là x ($x \in \mathbb{N}^*$, xe) (x < 50).

Do lô hàng có tổng 50 xe nên số xe loại II là 50 – x (xe)

Tổng số tiền mua xe loại I là 2x (triệu đồng)

Tổng số tiền mua xe loại II là $6(50-x)$ (triệu đồng)

Do tổng số tiền mà cửa hàng phải thanh toán là 160 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$2x+6(50-x)=160$$
$$\Leftrightarrow 2x+300-6x=160$$
$$\Leftrightarrow -4x=-140$$
$$\Leftrightarrow x=35(TM)$$

Vậy cửa hàng đã nhập về 35 xe loại I và 50 – 35 = 15 xe loại II

b) Thể tích của phần nước dâng lên trong bình hình trụ là thể tích của viên bi và bằng

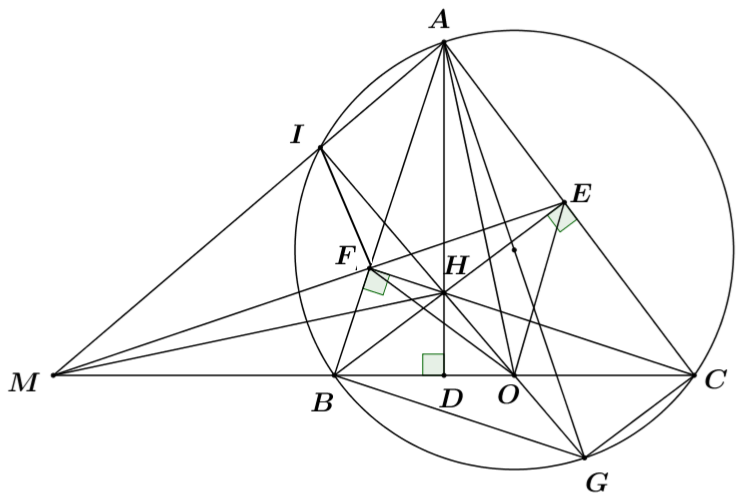
$$\pi.r^2.h=3,14.1,5^2.0,5=3,5325\left(cm^3\right)$$

Vậy thể tích viên bi là 3,5325 cm^3.

Câu 4 (VD):

Phương pháp:

Cách giải:



a) Chứng minh AEHF là tứ giác nội tiếp.

Xét tứ giác AEHF có $\angle AFH = \angle AEH = 90^0$ (do BE, CF là đường cao)

$\Rightarrow \angle AFH + \angle AEH = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà 2 góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác AEHF nội tiếp (dhnb) (đpcm)

b) Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC, M là giao điểm của tia EF và tia CB. Chứng minh rằng $\angle FAD = \angle OFC$ và $OC^2 = OD.OM$.

+) Chứng minh $\angle FAD = \angle OFC$

Ta có $\angle AFC = \angle ADC = 90^0$ (do CE, AD là đường cao)

Mà F, D là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn AC dưới 2 góc bằng nhau nên AFDC nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \angle FAD = \angle FCD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FD)

Mà tam giác BFC vuông tại F, trung tuyến FO nên OB = OC = OF (tính chất đường trung tuyến)

$\Rightarrow \Delta OCF$ cân tại O $\Rightarrow \angle OFC = \angle OCF$ (tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow \angle OFC = \angle FAD$ (đpcm).

+) Chứng minh $OC^2 = OD.OM$

Vì tứ giác AFDC là tứ giác nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle BAC = \angle BDF$ (góc ngoài và góc trong tại đối diện)

$\Rightarrow 180^0 - \angle BAC = 180^0 - \angle BDF$

$\Rightarrow \angle AFE + \angle AEF = \angle ODF$ (1)

Xét tứ giác BFEC có: $\angle BFC = \angle BEC = 90^0$ (gt)

Mà hai đỉnh F, E kề nhau cùng nhìn BC dưới hai góc bằng nhau

=> BFEC là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \angle AFE = \angle ACB$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện)

Mặt khác tam giác BEC vuông tại E có trung tuyến EO ứng với cạnh huyền BC

$\Rightarrow OB = OC = OE \Rightarrow \Delta OEC$ cân tại O $\Rightarrow \angle ACB = \angle OCE = \angle OEC$.

$\Rightarrow \angle AFE = \angle OEC$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \angle OEC + \angle AEF = \angle ODF$

$\Rightarrow 180^0 - \angle OEF = \angle ODF$

$\Rightarrow \angle OEF + \angle ODF = 180^0$

Ta có: $OE = OF = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta OEF$ cân tại O $\Rightarrow \angle OEF = \angle OFE$ (tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow \angle OFE + \angle ODF = 180^0$

Mà $\angle OFE + \angle OFM = 180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle ODF = \angle OFM$.

Xét ΔODF và ΔOFM có:

$\angle FOM$ chung

$\angle ODF = \angle OFM$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta ODF \backsim \Delta OFM$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{OD}{OF} = \frac{OF}{OM}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

$\Rightarrow OF^2 = OD.OM = OC^2$ (đpcm).

c) Chứng minh rằng hai đường thẳng MH và AO vuông góc với nhau.

Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường kính AG của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $\angle ABG = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AB \perp BG$.

Mà $CH \perp AB$ (gt) $\Rightarrow BG//CH$ (từ vuông góc đến song song).

Tương tự ta có: $\angle ACG = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp GC$.

Mà $BH \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BH//GC$ (từ vuông góc đến song song).

$\Rightarrow BHCG$ là hình bình hành (dhnb)

=> Hai đường chéo BC và HG cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mà O là trung điểm của BC (gt) => O cũng là trung điểm của HG.

=> H, O, G thẳng hàng.

Gọi AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại I.

Ta có $MI.MA = MB.MC = ME.MF$ (do AIBC và BFEC là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow AIFE$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)

$\Rightarrow \angle AIH = \angle AFH = 90^0$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AH) $\Rightarrow AI \perp IH$.

Mà $\angle AIG = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) $\Rightarrow AI \perp IG$.

$\Rightarrow I, H, G$ thẳng hàng.

$\Rightarrow I, H, O, G$ thẳng hàng.

Mà $AI \perp IG \Rightarrow OI \perp AM$.

Xét tam giác OAM có: $\begin{cases} OI \perp AM \ (cmt) \\ AD \perp OM \ (gt) \\ OI \cap AD = \{H\} \end{cases} \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác OAM.

$\Rightarrow MH$ là đường cao thứ ba ứng với cạnh AO.

Vậy $MH \perp AO\ (dpcm)$.

Câu 5 (VD):

Phương pháp:

Cách giải:

$$\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=4 & (1)\\ x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=x^2y^2-1 & (2)\end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 4=x^2+y^2+1+x^2y^2 \ge 2xy+x^2y^2+1=(xy+1)^2$.
$\Rightarrow -2 \le xy+1 \le 2 \Leftrightarrow -3 \le xy \le 1$

Bình phương hai vế của phương trình (2) ta được:

$$x^2(y^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+y^2(x^2+1)=x^4y^4-2x^2y^2+1$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2+y^2+x^2y^2+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}=x^4y^4-2x^2y^2+1$$
$$\Leftrightarrow 3+x^2y^2+2xy.2=x^4y^4-2x^2y^2+1$$
$$\Leftrightarrow x^4y^4-3x^2y^2-4xy-2=0\ (3)$$

Đặt $a=xy \Rightarrow -3 \le a \le 1$. Khi đó phương trình (3) trở thành:

$$a^4-3a^2-4a-2=0$$
$$\Leftrightarrow a^4+a^3-a^3-a^2-2a^2-2a-2a-2=0$$
$$\Leftrightarrow a^3(a+1)-a^2(a+1)-2a(a+1)-2(a+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (a+1)(a^3-a^2-2a-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+1=0\\ a^3-a^2-2a-2=0\end{array}\right.$$

TH1: $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1\ (tm)$

$\Rightarrow xy=-1 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{x}$ (do $x=0$ không là nghiệm của phương trình)

Thay vào (1) ta được:

$$(x^2+1)\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=4 \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)^2}{x^2}=4$$
$$\Leftrightarrow (x^2+1)^2=4x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+1=2x\\ x^2+1=-2x\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=0\\ (x+1)^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1 \Rightarrow y=-1\\ x=-1 \Rightarrow y=1\end{array}\right.$$

TH2: $a^3-a^2-2a-2=0 \Leftrightarrow a^3-1=a^2+2a+1 \Leftrightarrow a^3-1=(a+1)^2$

Vì $a \le 1$ nên $a^3 \le 1 \Leftrightarrow a^3 - 1 \le 0$ mà $(a+1)^2 \ge 0$ nên $a^3 - 1 = (a+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=1 \end{cases}$ (vô lý).

=> Phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là $(x;y)=(-1;1)$ hoặc $(x;y)=(1;-1)$.

-----HẾT-----