

ĐỀ THI GIỮA HỌC KÌ I – ĐỀ SỐ 1

Môn: Toán - Lớp 9

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



Mục tiêu

- Ôn tập các kiến thức giữa học kì 1 của chương trình sách giáo khoa Toán 9.
- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.
- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dần trải các kiến thức giữa học kì 1 – chương trình Toán 9.

Phần trắc nghiệm (3 điểm) Chọn câu trả lời đúng trong mỗi câu sau:

Câu 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào **không phải** là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x + 3y = 5$. B. $0x + 2y = 8$. C. $2x - 0y = 5$. D. $0x - 0y = 6$.

Câu 2: Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ có nghiệm là:

- A. $(x; y) = (0; 0)$. B. $(x; y) = (1; 0)$. C. $(x; y) = (1; 1)$. D. $(x; y) = (-1; -1)$.

Câu 3: Người ta cần chở một số lượng hàng. Nếu xếp vào mỗi xe 12 tấn thì thừa 3 tấn, nếu xếp vào mỗi xe 15 tấn thì có thể chở thêm 12 tấn nữa. Gọi x là số hàng cần vận chuyển và y là số xe tham gia chở hàng. Hệ phương trình thỏa mãn là:

- A. $\begin{cases} x + 12y = 3 \\ x - 15y = 12 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x - 12y = 3 \\ -x + 15y = 12 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x - 12y = 3 \\ x + 15y = 12 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x + 12y = 3 \\ -x + 15y = 12 \end{cases}$.

Câu 4: Biến đổi phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ về phương trình tích, ta được:

- A. $(x+1)(x-3) = 0$. B. $(x+1)(x+3) = 0$. C. $(x-1)(x-3) = 0$. D. $(x-1)(x+3) = 0$.

Câu 5: Hệ thức $2a \leq a+1$ là một bất đẳng thức và

- A. $a+1$ là vế trái, $2a$ là vế phải. B. $a+1$ là vế trước, $2a$ là vế sau.
C. $a+1$ là vế sau, $2a$ là vế trước. D. $2a$ là vế trái, $a+1$ là vế phải.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng:

- A. $a < b$ và $c > d$ thì $a + b < c + d$. B. $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d$.
C. $a > b$ và $c > d$ thì $ac > bd$. D. $a > b$ và $c > d$ thì $a + c < b + d$.

Câu 7: Bất phương trình dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) là bất phương trình bậc nhất một ẩn (ẩn là x) với điều kiện:

- A. a, b là hai số đã cho. B. a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$.
C. $a \neq 0$. D. a và b khác 0.

Câu 8: Nghiệm của bất phương trình $x - 2 > 0$ là:

- A. $x > 2$. B. $x < 2$. C. $x < -2$. D. $x > -2$.

Câu 9: Cho α và β là hai góc phụ nhau, khi đó:

- A. $\sin \alpha = \cos \beta$. B. $\sin \alpha = \cot \beta$. C. $\sin \alpha = \tan \beta$. D. $\cos \alpha = \cot \beta$.

Câu 10: Cho α là góc nhọn bất kì có $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, khi đó $\cot \alpha$ bằng:

- A. $\frac{1}{5}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. 5. D. -5.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại B có $A = 45^\circ$, $AC = \sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC là:

- A. $BC = 3$. B. $BC = 2$. C. $BC = \sqrt{2}$. D. $BC = 1$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$, $BC = 8$. Số đo góc C là: (làm tròn đến độ)

- A. $C \approx 52^\circ$. B. $C \approx 38^\circ$. C. $C \approx 51^\circ$. D. $C \approx 39^\circ$.

Phần tự luận (7 điểm)

Bài 1. (1 điểm) Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $(x - 1)(3x - 6) = 0$

b) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x-13}{(x+3)(x-2)}$

c) $2x - 4 > 0$

d) $2 - 3x \leq 4x + 5$

.....

.....

.....

.....

Bài 2. (2 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

b) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 công cụ. Nhờ sắp xếp hợp lý dây chuyền sản xuất nên xí nghiệp I đã vượt mức 12% kế hoạch, xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch. Do đó cả xí nghiệp đã làm được 400 công cụ. Tính số công cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

.....

.....

.....

.....

Bài 3. (1 điểm) Tượng đài chiến thắng là một công trình kiến trúc độc đáo được thi công nhằm kỷ niệm ngày giải phóng thị xã Long Khánh, ngày 21/04/1975 – thể hiện ý chí quyết thắng của quân và dân ta. Em hãy tính chiều cao của công trình này biết rằng khi tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc 52° thì bóng của nó trên mặt đất là 16m. (Làm tròn đến số thập phân thứ hai). (Giả sử chu vi mặt đáy khối chóp tam giác không đáng kể)



.....

.....

.....

Bài 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

- a) Biết $AB = 2\sqrt{3}cm$; $AC = 6cm$. Giải tam giác ABC.
- b) Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên AB, AC. Chứng minh $BD \cdot DA + CE \cdot EA = AH^2$.
- c) Lấy điểm M nằm giữa E và C, kẻ AI vuông góc với MB tại I.

Chứng minh $\sin \angle AMB \cdot \sin \angle ACB = \frac{HI}{CM}$.

.....

.....

.....

Bài 5. (0,5 điểm) Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết rằng người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi 800 m. Hỏi anh ta phải chọn mảnh đất có kích thước như thế nào để diện tích đất canh tác là lớn nhất.

.....

.....

.....

----- Hết -----



Phần trắc nghiệm

Câu 1: D	Câu 2: B	Câu 3: B	Câu 4: C	Câu 5: D	Câu 6: B
Câu 7: B	Câu 8: A	Câu 9: A	Câu 10: C	Câu 11: D	Câu 12: D

Câu 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào **không phải** là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $2x + 3y = 5$. B. $0x + 2y = 8$. C. $2x - 0y = 5$. D. $0x - 0y = 6$.

Phương pháp

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ thức dạng $ax + by = c$, trong đó a , b và c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

Lời giải

Phương trình $0x - 0y = 6$ là phương trình bậc nhất vì hệ số $a = b = 0$.

Đáp án D.

Câu 2: Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ có nghiệm là:

- A. $(x; y) = (0; 0)$. B. $(x; y) = (1; 0)$. C. $(x; y) = (1; 1)$. D. $(x; y) = (-1; -1)$.

Phương pháp

Hệ phương trình có nghiệm là cặp số $(x_0; y_0)$ nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hai phương trình của hệ.

Lời giải

Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ có nghiệm là $(x; y) = (1; 0)$ vì $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 0 = 2 \\ 1 + 0 = 1 \end{cases}$.

Đáp án B.

Câu 3: Người ta cần chở một số lượng hàng. Nếu xếp vào mỗi xe 12 tấn thì thừa 3 tấn, nếu xếp vào mỗi xe 15 tấn thì có thể chở thêm 12 tấn nữa. Gọi x là số hàng cần vận chuyển và y là số xe tham gia chở hàng. Hệ phương trình thỏa mãn là:

- A. $\begin{cases} x + 12y = 3 \\ x - 15y = 12 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 12y = 3 \\ -x + 15y = 12 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x - 12y = 3 \\ x + 15y = 12 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + 12y = 3 \\ -x + 15y = 12 \end{cases}$

Phương pháp

Dựa vào đề bài để viết hệ phương trình thỏa mãn đề bài.

Lời giải

Vì nếu xếp mỗi xe 12 tấn thì thừa 3 tấn nên ta có phương trình $x - 12y = 3$.

Vì nếu xếp vào mỗi xe 15 tấn thì có thể chở thêm 12 tấn nữa nên ta có phương trình $15y - x = 12$ hay $-x + 15y = 12$.

Vậy hệ phương trình thỏa mãn là
$$\begin{cases} x - 12y = 3 \\ -x + 15y = 12 \end{cases}$$

Đáp án B.

Câu 4: Biến đổi phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ về phương trình tích, ta được:

A. $(x+1)(x-3) = 0$. B. $(x+1)(x+3) = 0$. C. $(x-1)(x-3) = 0$. D. $(x-1)(x+3) = 0$.

Phương pháp

Phân tích vế trái thành nhân tử để biến đổi phương trình về phương trình tích.

Lời giải

Ta có:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - x - 3x + 3 = 0$$

$$(x^2 - x) - (3x - 3) = 0$$

$$x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

Đáp án C.

Câu 5: Hệ thức $2a \leq a+1$ là một bất đẳng thức và

A. $a+1$ là vế trái, $2a$ là vế phải. B. $a+1$ là vế trước, $2a$ là vế sau.
C. $a+1$ là vế sau, $2a$ là vế trước. D. $2a$ là vế trái, $a+1$ là vế phải.

Phương pháp

Ta gọi hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$) là bất đẳng thức và gọi a là vế trái, b là vế phải của bất đẳng thức

Lời giải

Hệ thức $2a \leq a+1$ có $2a$ là vế trái, $a+1$ là vế phải.

Đáp án D.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng:

A. $a < b$ và $c > d$ thì $a+b < c+d$. B. $a < b$ và $c < d$ thì $a+c < b+d$.
C. $a > b$ và $c > d$ thì $ac > bd$. D. $a > b$ và $c > d$ thì $a+c < b+d$.

Phương pháp

Dựa vào các tính chất của bất đẳng thức.

Lời giải

Theo tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng, với $a < b$ và $c < d$ thì $a+c < b+d$ nên đáp án B đúng.

Đáp án B.

Câu 7: Bất phương trình dạng $ax+b > 0$ (hoặc $ax+b < 0$, $ax+b \geq 0$, $ax+b \leq 0$) là bất phương trình bậc nhất một ẩn (ẩn là x) với điều kiện:

A. a, b là hai số đã cho.

B. a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

C. $a \neq 0$.

D. a và b khác 0.

Phương pháp

Bất phương trình dạng $ax+b < 0$ (hoặc $ax+b > 0$; $ax+b \leq 0$; $ax+b \geq 0$) trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$ được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn x* .

Lời giải

Điều kiện của a, b là a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$.

Đáp án B.

Câu 8: Nghiệm của bất phương trình $x-2 > 0$ là:

A. $x > 2$.

B. $x < 2$.

C. $x < -2$.

D. $x > -2$.

Phương pháp

Giải bất phương trình để tìm nghiệm.

Lời giải

Ta có:

$$x-2 > 0$$

$$x > 2$$

Đáp án A.

Câu 9: Cho α và β là hai góc phụ nhau, khi đó:

A. $\sin \alpha = \cos \beta$.

B. $\sin \alpha = \cot \beta$.

C. $\sin \alpha = \tan \beta$.

D. $\cos \alpha = \cot \beta$.

Phương pháp

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

Lời giải

Với α và β là hai góc phụ nhau thì $\sin \alpha = \cos \beta$; $\tan \alpha = \cot \beta$ nên đáp án A đúng.

Đáp án A.

Câu 10: Cho α là góc nhọn bất kì có $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, khi đó $\cot \alpha$ bằng:

A. $\frac{1}{5}$.

B. $-\frac{1}{5}$.

C. 5.

D. -5.

Phương pháp

Sử dụng kiến thức $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$.

Lời giải

Ta có: $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$.

Đáp án C.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại B có $A = 45^\circ$, $AC = \sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC là:

A. $BC = 3$.

B. $BC = 2$.

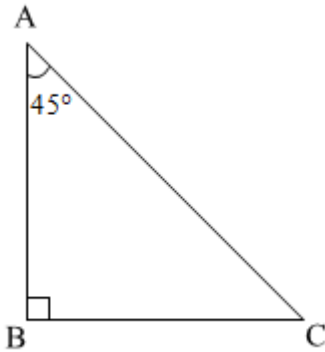
C. $BC = \sqrt{2}$.

D. $BC = 1$.

Phương pháp

Biểu diễn BC theo AC và tỉ số lượng giác của góc A.

Lời giải



Ta có: $\sin A = \frac{BC}{AC}$ suy ra $BC = AC \cdot \sin A = \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 1$.

Đáp án D.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 5$, $BC = 8$. Số đo góc C là: (làm tròn đến độ)

A. $C \approx 52^\circ$.

B. $C \approx 38^\circ$.

C. $C \approx 51^\circ$.

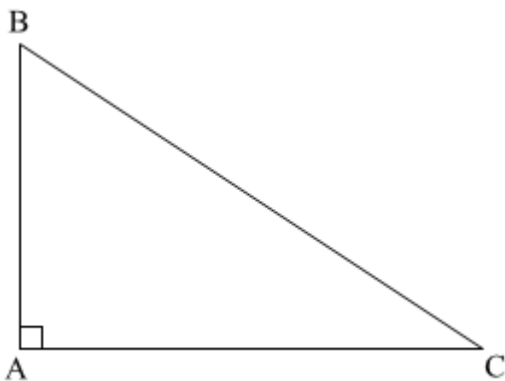
D. $C \approx 39^\circ$.

Phương pháp

Biểu diễn tỉ số lượng giác của góc C theo AB và BC.

Sử dụng máy tính cầm tay để tính góc C theo tỉ số lượng giác của nó.

Lời giải



Ta có: $\sin C = \frac{5}{8}$ suy ra $C \approx 39^\circ$.

Đáp án D.

Phần tự luận.

Bài 1. (1 điểm) Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $(x-1)(3x-6) = 0$

b) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x-13}{(x+3)(x-2)}$

c) $2x-4 > 0$

d) $2-3x \leq 4x+5$

Phương pháp

a) Để giải phương trình tích $(ax+b)(cx+d) = 0$, ta giải hai phương trình $ax+b=0$ và $cx+d=0$. Sau đó lấy tất cả các nghiệm của chúng.

b) Tìm điều kiện xác định, quy đồng mẫu và giải phương trình tìm được. Sau đó kiểm tra điều kiện của các nghiệm tìm được.

c, d) Dựa vào cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn và phương trình đưa về dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Lời giải

a) $(x-1)(3x-6) = 0$

+ $x-1=0$

$x=1$

+ $3x-6=0$

$3x=6$

$x=2$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$; $x=2$.

b) $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x-13}{(x+3)(x-2)}$

ĐKXD: $x \neq -3$ và $x \neq 2$.

Ta có:

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x-13}{(x+3)(x-2)}$$

$$\frac{2(x-2)}{(x+3)(x-2)} - \frac{x+3}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x-13}{(x+3)(x-2)}$$

$$2(x-2) - (x+3) = 2x-13$$

$$2x-4-x-3 = 2x-13$$

$$x-7 = 2x-13$$

$$x-2x = -13+7$$

$$-x = -6$$

$$x = 6(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

c) $2x - 4 > 0$

$$2x > 4$$

$$x > 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x > 2$.

d) $2 - 3x \leq 4x + 5$

$$-3x - 4x \leq 5 - 2$$

$$-7x \leq 3$$

$$x \geq \frac{-3}{7}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \geq \frac{-3}{7}$.

Bài 2. (2 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

b) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai xí nghiệp theo kế hoạch phải làm tổng cộng 360 công cụ. Nhờ sắp xếp hợp lý dây chuyền sản xuất nên xí nghiệp I đã vượt mức 12% kế hoạch, xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch. Do đó cả xí nghiệp đã làm được 400 công cụ. Tính số công cụ mỗi xí nghiệp phải làm theo kế hoạch.

Phương pháp

a) Sử dụng phương pháp cộng đại số để giải hệ phương trình.

b) - Đặt ẩn và đặt điều kiện cho ẩn, lập hai phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các ẩn, đưa về bài toán giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Giải hệ phương trình tìm được ẩn, sau đó kiểm tra điều kiện và chọn giá trị thỏa mãn.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2 \cdot 1 + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -1)$.

b) Gọi số dụng cụ mà xí nghiệp I và xí nghiệp II phải làm lần lượt là x, y ($x, y \in N^*$).

Theo kế hoạch, hai xí nghiệp sản xuất phải làm tổng cộng 360 dụng cụ nên ta có:

$$x + y = 360 \quad (1)$$

Thực tế, xí nghiệp I đã vượt mức 12% kế hoạch, xí nghiệp II đã vượt mức 10% kế hoạch, do đó hai xí nghiệp đã làm được 400 dụng cụ nên ta có phương trình:

$$(x + 12\%x) + (y + 10\%y) = 400 \text{ hay } 1,12x + 1,1y = 400 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 360 \\ 1,12x + 1,1y = 400 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được:
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 160 \end{cases} (TM).$$

Vậy theo kế hoạch xí nghiệp I làm được 200 dụng cụ và xí nghiệp II làm được 160 dụng cụ.

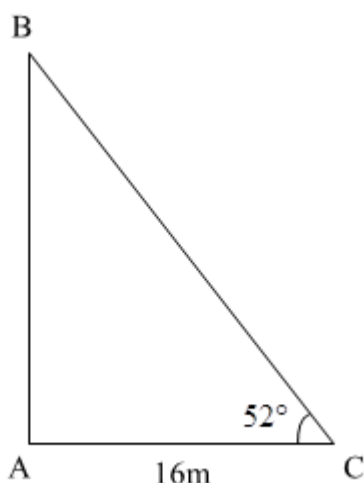
Bài 3. (1 điểm) Tượng đài chiến thắng là một công trình kiến trúc độc đáo được thi công nhằm kỷ niệm ngày giải phóng thị xã Long Khánh, ngày 21/04/1975 – thể hiện ý chí quyết thắng của quân và dân ta. Em hãy tính chiều cao của công trình này biết rằng khi tia nắng của mặt trời tạo với mặt đất một góc 52° thì bóng của nó trên mặt đất là 16m. (Làm tròn đến số thập phân thứ hai). (Giả sử chu vi mặt đáy khối chóp tam giác không đáng kể)



Phương pháp

Dựa vào kiến thức về tỉ số lượng giác để tính chiều cao của công trình.

Lời giải



Giả sử hình biểu diễn như hình vẽ.

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $\tan BCA = \frac{AB}{AC}$

Suy ra $AB = AC \cdot \tan BCA = 16 \cdot \tan 52^\circ \approx 20,48(m)$

Vậy chiều cao của công trình này là khoảng $20,48m$.

Bài 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

a) Biết $AB = 2\sqrt{3}cm$; $AC = 6cm$. Giải tam giác ABC.

b) Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên AB, AC. Chứng minh $BD \cdot DA + CE \cdot EA = AH^2$.

c) Lấy điểm M nằm giữa E và C, kẻ AI vuông góc với MB tại I.

Chứng minh $\sin AMB \cdot \sin ACB = \frac{HI}{CM}$.

Phương pháp

a) Vận dụng các kiến thức về hệ thức lượng trong tam giác vuông để giải tam giác.

b) Chứng minh $\triangle BHD \sim \triangle HAD$ (g.g) suy ra $BD \cdot DA = DH^2$

Chứng minh $\triangle CHE \sim \triangle HAE$ (g.g) suy ra $CE \cdot AE = HE^2$.

$$BD \cdot DA + CE \cdot AE = DH^2 + HE^2$$

Chứng minh tứ giác ADHE là hình chữ nhật nên $AH = DE$.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác DHE vuông tại H, ta có: $DH^2 + HE^2 = DE^2$.

$$\text{Suy ra } DH^2 + HE^2 = AH^2$$

Từ đó ta có $BD \cdot DA + CE \cdot AE = AH^2$ (đpcm)

c) Chứng minh $\triangle BIA \sim \triangle BAM$ (g.g) suy ra $BI \cdot BM = AB^2$.

Chứng minh $\triangle BHA \sim \triangle BAC$ (g.g) suy ra $BH \cdot BC = AB^2$.

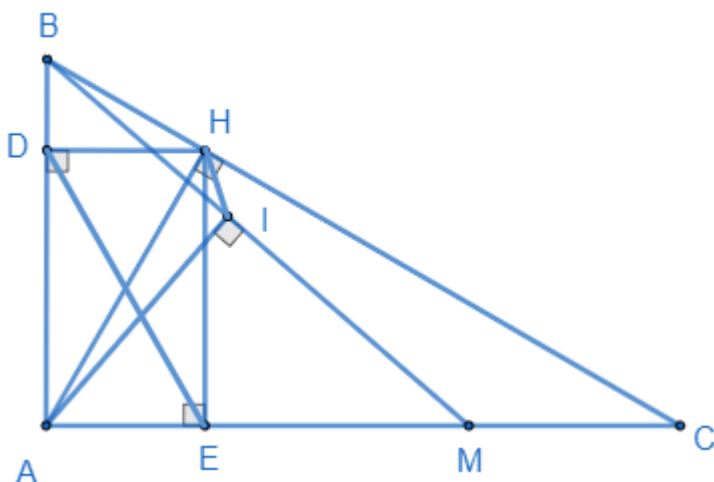
Do đó $BI \cdot BM = BH \cdot BC$ hay $\frac{BI}{BC} = \frac{BH}{BM}$.

Chứng minh $\Delta BHI \sim \Delta BMC$ (c.g.c) suy ra $\frac{HI}{MC} = \frac{BI}{BC}$.

Dựa vào kiến thức về tỉ số lượng giác, ta có: $\sin \angle AMB = \frac{AB}{BM}$; $\sin \angle ACB = \frac{AB}{BC}$.

Biến đổi $\sin \angle AMB \cdot \sin \angle ACB = \frac{AB}{BM} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB^2}{BM \cdot BC} = \frac{BI}{BC} = \frac{HI}{CM}$. Ta được điều phải chứng minh.

Lời giải



a) Xét tam giác ABC vuông tại A, áp dụng định lí Pythagore trong tam giác, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (2\sqrt{3})^2 + 6^2 = 48 \text{ suy ra } BC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Ta có: $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $B = 60^\circ$.

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Vậy $BC = 4\sqrt{3} \text{ cm}; B = 60^\circ; C = 30^\circ$.

b) Xét tam giác BHD và tam giác HAD có:

$$\angle BDH = \angle HDA (= 90^\circ)$$

$$\angle BHD = \angle HAD \text{ (cùng phụ với } \angle DBH \text{)}$$

suy ra $\Delta BHD \sim \Delta HAD$ (g.g) nên $\frac{BD}{DH} = \frac{DH}{DA}$. Do đó $BD \cdot DA = DH^2$. (1)

Xét tam giác CHE và tam giác HAE có:

$$\angle CEH = \angle HEA (= 90^\circ)$$

$$\angle CHE = \angle HAE \text{ (cùng phụ với } \angle C \text{)}$$

suy ra $\Delta CHE \sim \Delta HAE$ (g.g) nên $\frac{CE}{HE} = \frac{HE}{AE}$. Do đó $CE \cdot AE = HE^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD \cdot DA + CE \cdot AE = DH^2 + HE^2$ (3).

Vì tứ giác ADHE có $DAE = ADH = AEH = 90^\circ$ nên tứ giác ADHE là hình chữ nhật. Do đó $AH = DE$.

Áp dụng định lí Pythagore vào tam giác DHE vuông tại H, ta có: $DH^2 + HE^2 = DE^2$. Suy ra

$$DH^2 + HE^2 = AH^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $BD \cdot DA + CE \cdot AE = AH^2$ (đpcm)

c) Xét tam giác BIA và tam giác BAM có:

$$BIA = BAM (= 90^\circ)$$

B chung

suy ra $\Delta BIA \sim \Delta BAM$ (g.g) nên $\frac{BI}{AB} = \frac{AB}{BM}$. Do đó $BI \cdot BM = AB^2$.

Xét tam giác BHA và tam giác BAC có:

$$BHA = BAC (= 90^\circ)$$

B chung

suy ra $\Delta BHA \sim \Delta BAC$ (g.g) nên $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$. Do đó $BH \cdot BC = AB^2$.

Từ đó ta có $BI \cdot BM = BH \cdot BC$ suy ra $\frac{BI}{BC} = \frac{BH}{BM}$.

Xét tam giác BHI và tam giác BMC có:

B chung

$$\frac{BI}{BC} = \frac{BH}{BM} \quad (\text{cmt})$$

nên $\Delta BHI \sim \Delta BMC$ (c.g.c) suy ra $\frac{HI}{MC} = \frac{BI}{BC}$.

Xét tam giác AMB vuông tại A, ta có: $\sin \angle AMB = \frac{AB}{BM}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $\sin \angle ACB = \frac{AB}{BC}$.

$$\text{Suy ra } \sin \angle AMB \cdot \sin \angle ACB = \frac{AB}{BM} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB^2}{BM \cdot BC} = \frac{BI \cdot BM}{BM \cdot BC} = \frac{BI}{BC} = \frac{HI}{CM}.$$

Vậy $\sin \angle AMB \cdot \sin \angle ACB = \frac{HI}{CM}$ (đpcm).

Bài 5. (0,5 điểm) Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết rằng người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi 800 m. Hỏi anh ta phải chọn mảnh đất có kích thước như thế nào để diện tích đất canh tác là lớn nhất.

(HD: Sử dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$).

Phương pháp

Gọi hai cạnh của miếng đất là x, y .

Sử dụng bất đẳng thức: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$.

Lời giải

* Chứng minh bất đẳng thức $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ hay $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$

Ta có: $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ với mọi a, b .

Vậy $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$.

* Áp dụng bất đẳng thức trên để giải.

Gọi hai cạnh của miếng đất lần lượt là x, y (m). ($0 < x, y < 800$)

Vì chu vi của mảnh đất là 800m nên ta có: $2(x+y) = 800$ hay $x+y = 400$.

Diện tích đất canh tác là xy .

Ta có: $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{400^2}{4} = 40000(m^2)$.

Dấu “=” xảy ra là giá trị lớn nhất của xy . Khi đó kích thước của mảnh đất thỏa mãn $x+y = 400$ và $xy = 40000$.

Ta có $x+y = 400$ nên $y = 400 - x$.

Thay vào $xy = 40000$, ta được:

$$(400 - x)x = 40000$$

$$-x^2 + 400x - 40000 = 0$$

$$x^2 - 400x + 40000 = 0$$

$$(x - 200)^2 = 0$$

$$x = 200$$

Khi đó $y = 400 - 200 = 200$.

Vậy người đó phải chọn mảnh đất có kích thước 200m x 200m để diện tích đất canh tác là lớn nhất.