

## ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HỌC KÌ 1

Môn: Toán - Lớp 9

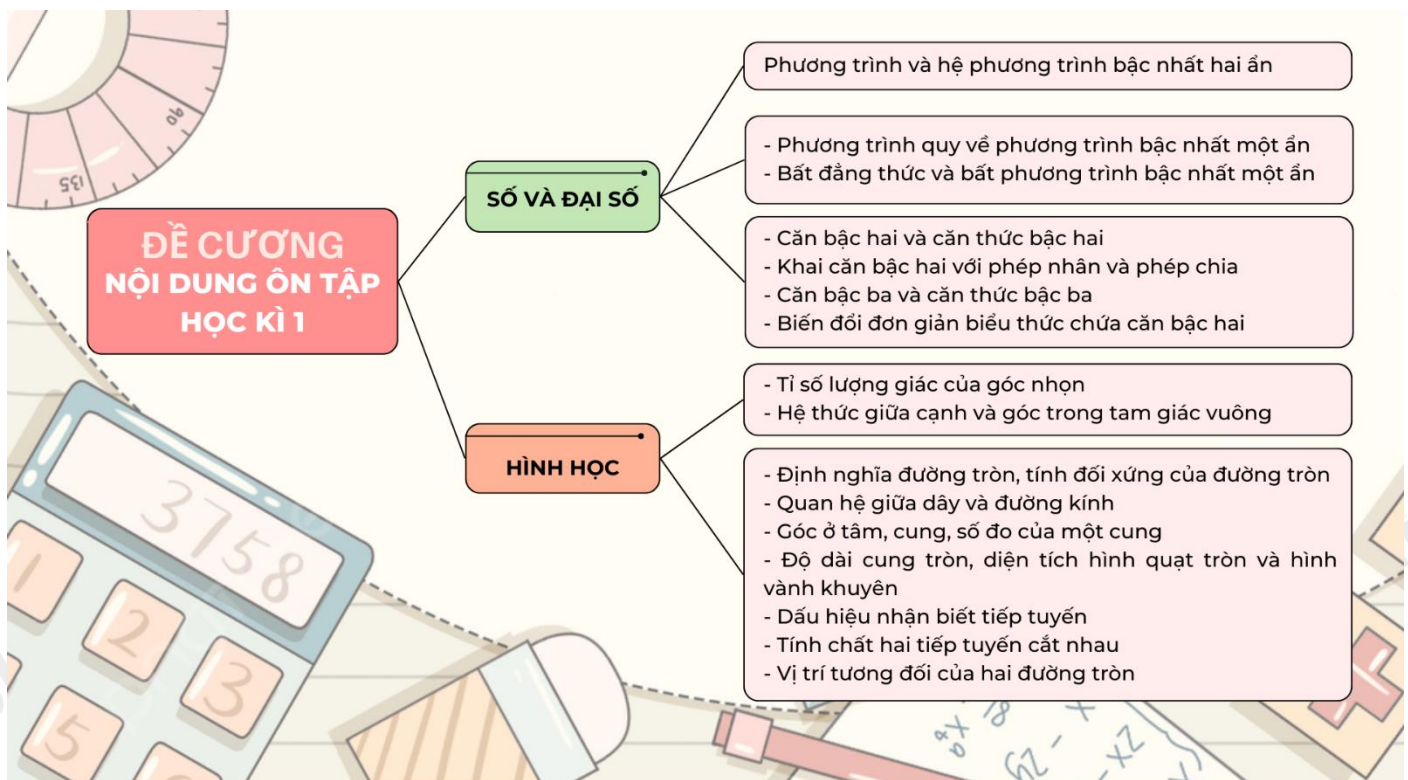
BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



### Mục tiêu

- Ôn tập và củng cố lại các kiến thức, áp dụng giải các dạng bài tập liên quan của chương trình học kì 1 sách giáo khoa Toán 9.
- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm và tự luận Toán học.
- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dần trải các kiến thức học kì 1 – chương trình Toán 9.

### A. NỘI DUNG ÔN TẬP



### B. BÀI TẬP

#### I. Phần trắc nghiệm

**Câu 1:** Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $xy + x = 3$ .      B.  $x + y = xy$ .      C.  $2x - y = 0$ .      D.  $x^2 + y^2 = 5$ .

**Câu 2:** Nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} -2x - y = -1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$  là:

- A. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.                      B. Hệ phương trình vô nghiệm.  
C. Hệ phương trình có hai nghiệm.                      D. Hệ phương trình có vô số nghiệm.

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $\frac{x+1}{x-2} - 1 = \frac{24}{(x+3)(x-2)}$  là:

- A.  $x = 2$ .                      B.  $x = -3$ .                      C.  $x = 5$ .                      D.  $x = -5$ .

**Câu 4:** Nghiệm của phương trình  $(x+5)(2x-10) = 0$  là

- A.  $x = 5$ .                      B.  $x \neq 5$ .                      C.  $x = -5$ .                      D.  $x = -5; x = 5$ .

**Câu 5:** Số 3 là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A.  $5x - 10 \leq 0$ .                      B.  $2x + 1 > 0$ .                      C.  $-5x + 7 \geq 0$ .                      D.  $2x - 5 < 0$ .

**Câu 6:** Giải phương trình:  $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$

- A.  $x = 1; x = \sqrt{3}$ .                      B.  $x = -1; x = \sqrt{3}$ .                      C.  $x = 1; x = -\sqrt{3}$ .                      D.  $x = -1; x = -\sqrt{3}$ .

**Câu 7:** Thực hiện phép tính:  $\sqrt{(1-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

- A.  $\sqrt{3}$ .                      B.  $-\sqrt{3}$ .                      C.  $\sqrt{2}$ .                      D.  $-\sqrt{2}$ .

**Câu 8:** Tính giá trị biểu thức  $B = 2\sqrt{2^2 \cdot 5} - 3\sqrt{3^2 \cdot 5} + 4\sqrt{4^2 \cdot 5}$ .

- A.  $B = 9\sqrt{5}$ .                      B.  $B = 10\sqrt{5}$ .                      C.  $B = 11\sqrt{5}$ .                      D.  $B = 12\sqrt{5}$ .

**Câu 9:** Biểu thức  $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2018})^3} - \sqrt{2018}$  có giá trị bằng:

- A. 1.                      B. -1.                      C.  $1 - 2\sqrt{2018}$ .                      D.  $2\sqrt{2018} - 1$ .

**Câu 10:** Kết quả của  $\sqrt[3]{(x-1)^3}$  là

- A.  $\frac{x-1}{3}$ .                      B.  $1-x$ .                      C.  $3(x-1)$ .                      D.  $x-1$ .

**Câu 11:** Cho tam giác ABC vuông tại A, có  $AB = \frac{2}{3}BC$ . Tính  $\cot C$

- A.  $\cot C = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ .                      B.  $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      C.  $\cot C = \frac{6}{5}$ .                      D.  $\cot C = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 12:** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $B = 30^\circ$  và  $AB = 10\text{cm}$ . Độ dài cạnh BC bằng bao nhiêu?

- A.  $10\sqrt{3}\text{cm}$ .                      B.  $20\sqrt{3}\text{cm}$ .                      C.  $\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ .                      D.  $\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ .

**Câu 13:** Cho tam giác MNP vuông tại M. Biết  $MN = 3\text{cm}$ ,  $NP = 5\text{cm}$ . Tỷ số lượng giác nào đúng?

- A.  $\cot P = \frac{3}{5}$ .      B.  $\tan P = \frac{5}{3}$ .      C.  $\sin P = \frac{3}{5}$ .      D.  $\cot P = \frac{3}{4}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác vuông ABC vuông tại A như hình vẽ bên. Biết  $\cos B = \frac{5}{8}$ ; độ dài trung tuyến AM bằng

- A.  $5\text{cm}$ .      B.  $4,5\text{cm}$ .      C.  $3,5\text{cm}$ .      D.  $4\text{cm}$ .

**Câu 15:** Đường tròn tâm O bán kính 5cm, M là điểm nằm trên đường tròn đó khi và chỉ khi

- A.  $OM = 5\text{cm}$ .      B.  $OM < 5\text{cm}$ .      C.  $OM \geq 5\text{cm}$ .      D.  $OM \leq 5\text{cm}$ .

**Câu 16:** Trong đường tròn  $(O; 4\text{cm})$ , dây lớn nhất có độ dài bằng

- A.  $10\text{cm}$ .      B.  $8\text{cm}$ .      C.  $4\text{cm}$ .      D.  $6\text{cm}$ .

**Câu 17:** Cho hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC,  $B \in (O)$ ,  $C \in (O')$ . Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I. Khi đó

- A.  $BAC = 90^\circ$ .      B.  $BAC = 60^\circ$ .      C.  $BAC = 30^\circ$ .      D.  $BAC = 120^\circ$ .

**Câu 18:** Cho hai đường tròn  $(O; 2\text{cm})$  và  $(O'; 6\text{cm})$ . Đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  tiếp xúc ngoài với nhau khi  $OO'$  bằng:

- A.  $3\text{cm}$ .      B.  $4\text{cm}$ .      C.  $12\text{cm}$ .      D.  $8\text{cm}$ .

**Câu 19:** Cho đường tròn  $(O; R)$  có dây  $MN = R\sqrt{2}$ . Khi đó số đo của cung lớn MN là:

- A.  $45^\circ$ .      B.  $90^\circ$ .      C.  $315^\circ$ .      D.  $270^\circ$ .

**Câu 20:** Ngũ giác đều ABCDE nội tiếp đường tròn tâm O. Khi đó góc COD bằng

- A.  $18^\circ$ .      B.  $36^\circ$ .      C.  $55^\circ$ .      D.  $72^\circ$ .

## II. Phần tự luận

**Bài 1.** Cho  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - \sqrt{x} + x - 1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{x - 1} \right)$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

- Rút gọn A.
- Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .
- Tìm x để A đạt GTNN.

**Bài 2.** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{x - 2\sqrt{x}}{x - 4}$  và  $Q = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$  ( $x \geq 0; x \neq 4$ )

- Rút gọn P.
- Tính giá trị của P khi  $x = 16$ .

c) Biết  $M = P:Q$ . Tìm giá trị của  $x$  để  $M^2 < \frac{1}{4}$ .

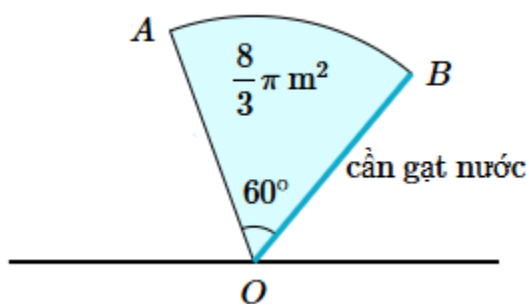
**Bài 3.** Hôm qua mẹ của bạn An qua tiệm tạp hóa gần nhà mua 37 quả trứng gồm 24 quả trứng gà và 13 quả trứng vịt hết 91200 đồng. Hôm nay mẹ của bạn An cũng qua tiệm tạp hóa gần nhà mua 84 quả trứng gồm 48 quả trứng gà và 36 quả trứng vịt hết 206400 đồng. Hỏi nếu ngày mai mẹ bạn An nhờ bạn An qua tiệm tạp hóa trên mua 62 quả trứng gồm 22 quả trứng gà và 40 quả trứng vịt thì mẹ bạn An phải đưa cho bạn An số tiền vừa đủ là bao nhiêu? (biết giá trứng không thay đổi)

**Bài 4.** Một trường trung học dự định tổ chức chuyên tham quan học tập thực tế cho học sinh khối 9 tại một bảo tàng và công viên khoa học (Science Park) trong 1 ngày (trong ngày từ 7h00 đến 17h00). Tổng kinh phí nhà trường dự trù là 20 triệu đồng, bao gồm chi phí thuê xe đưa đón và bữa ăn cho học sinh. Gọi  $x$  là số bạn có thể tham gia chuyên tham quan. (học sinh,  $x > 0$ )

- Giá thuê xe là 5 triệu đồng/ngày.
- Vé vào cổng mỗi học sinh là 30 000 đồng.
- Bữa ăn trưa cho mỗi học sinh có giá 50 000 đồng.

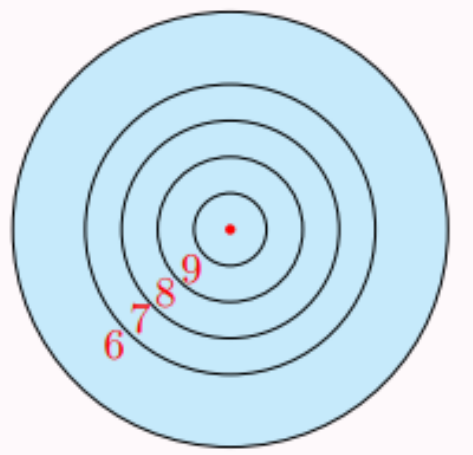
Trường có thể tổ chức cho tối đa bao nhiêu người?

**Bài 5.** Một đầu của cần gạt nước được cố định tại điểm O. Khi đầu còn lại của cần gạt xoay  $60^\circ$ , nó sẽ quét được một vùng có diện tích bằng  $\frac{8}{3}\pi(m^2)$ .



Chiều dài của cần gạt nước là bao nhiêu cm?

**Bài 6.** Một tấm bia tạo bởi năm đường tròn đồng tâm lần lượt có bán kính 5cm, 10cm, 15cm, 20cm và 30cm. Giả thiết rằng người chơi ném phi tiêu một cách ngẫu nhiên và luôn trúng bia. Tính xác suất ném trúng vòng 8 (hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba). Biết rằng xác suất cần tìm bằng tỉ số giữa diện tích của hình vành khuyên tương ứng với diện tích của hình tròn lớn nhất.



**Bài 7.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, AO'C. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn,  $D \in (O)$  và  $E \in (O')$ . Gọi M là giao điểm của BD và CE.

- a) Tính số đo của  $DAE$ .
- b) Tứ giác ADME là hình gì?
- c) Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

**Bài 8.** Cho đường tròn  $(O;R)$  đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn  $(O)$  (C khác A và B). Kẻ CH vuông góc với AB tại H.

- a) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại C và  $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$ .
- b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn  $(O)$  cắt tia BC ở D. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn  $(O)$  cắt IC ở K. Xác định vị trí điểm C trên đường tròn  $(O)$  để diện tích tứ giác ABKI nhỏ nhất.

**Bài 9.** Để rào một khu đất có hai phần hình chữ nhật cho gia đình trồng hoa kiểng, một bác nông dân sử dụng 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E trước khuôn viên nhà dọc theo một con sông (như hình vẽ). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét.



Tính diện tích đất lớn nhất bác nông dân rào được.

**Bài 10.** Tính giá trị của  $A = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024} + 2024\sqrt{2025}}$ .

----- Hết -----

**I. Phần trắc nghiệm**

Câu 1. C	Câu 2. A	Câu 3. C	Câu 4. D	Câu 5. B
Câu 6. A	Câu 7. A	Câu 8. C	Câu 9. C	Câu 10. D
Câu 11. B	Câu 12. D	Câu 13. C	Câu 14. D	Câu 15. A
Câu 16. B	Câu 17. A	Câu 18. D	Câu 19. D	Câu 20. B

**II. Phần tự luận**

**Bài 1.** Cho  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$  với  $x \geq 0, x \neq 1$ .

a) Rút gọn A.

b) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

c) Tìm x để A đạt GTNN.

**Phương pháp**

a) Quy đồng và rút gọn phân thức

b) Tính và đưa A về dạng  $A = a + \frac{b}{c}$  với a, b là các số nguyên, c là biểu thức chứa x.

c) Từ điều kiện của x để tìm giá trị lớn nhất của A.

**Lời giải**

a) Với  $x \geq 0, x \neq 1$  ta có:

$$A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{x}+x-1} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1} \right)$$

$$A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$$

$$A = \frac{x-1-2\sqrt{x}+2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot (\sqrt{x}+1)$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

b) Ta có  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}, (x \geq 0)$ .

Đặt  $B = \sqrt{x}+1$ , để A nguyên khi x nguyên thì B là ước nguyên của 2.

Vì  $x \geq 0$  nên  $B > 0$ , suy ra B là ước nguyên dương của 2.

$$U(2) = \{1; 2\}$$

TH1:  $\sqrt{x}+1=1$  suy ra  $x=0(tm)$

TH2:  $\sqrt{x}+1=2$  suy ra  $x=1(ktm)$

Vậy  $x=0$  thì A nguyên.

c) Ta có  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ .

Vì  $\sqrt{x}+1 \geq 1 (do \sqrt{x} \geq 0)$  nên  $\frac{2}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{2}{1}$

Suy ra  $-\frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq -2$

Do đó  $1 - \frac{2}{\sqrt{x}+1} \geq -1$  hay  $A \geq -1$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $x=0$ .

Vậy min  $A = -1$  khi  $x=0$ .

**Bài 2.** Cho biểu thức  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$  và  $Q = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} (x \geq 0; x \neq 4)$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi  $x=16$ .

c) Biết  $M = P:Q$ . Tìm giá trị của x để  $M^2 < \frac{1}{4}$ .

**Phương pháp**

- a) Rút gọn phân thức trước rồi rút gọn biểu thức
- b) Thay  $x=16$  vào P để tính giá trị.
- c) Tìm M thay vào  $M^2 < \frac{1}{4}$  để tìm x, lưu ý điều kiện đầu bài

**Lời giải**

a) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

b) Thay  $x=16$  vào P, ta được:

$$P = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16}-2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Vậy với  $x=16$  thì  $P=2$ .

c) Ta có:

$$M = P : Q = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Vì } M^2 < \frac{1}{4} \text{ nên } \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right)^2 < \frac{1}{4}. \text{ Suy ra } \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right| < \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} > 0 \text{ nên } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > 0$$

$$\text{Do đó } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{x} < \sqrt{x} + 2$$

$$\sqrt{x} < 2$$

$$x < 4$$

Kết hợp điều kiện  $x \geq 0; x \neq 4$  ta được  $0 \leq x < 4$ .



Vậy để  $M^2 < \frac{1}{4}$  thì  $0 \leq x < 4$ .

**Bài 3.** Hôm qua mẹ của bạn An qua tiệm tạp hóa gần nhà mua 37 quả trứng gồm 24 quả trứng gà và 13 quả trứng vịt hết 91200 đồng. Hôm nay mẹ của bạn An cũng qua tiệm tạp hóa gần nhà mua 84 quả trứng gồm 48 quả trứng gà và 36 quả trứng vịt hết 206400 đồng. Hỏi nếu ngày mai mẹ bạn An nhờ bạn An qua tiệm tạp hóa trên mua 62 quả trứng gồm 22 quả trứng gà và 40 quả trứng vịt thì mẹ bạn An phải đưa cho bạn An số tiền vừa đủ là bao nhiêu? (biết giá trứng không thay đổi)

### Phương pháp

Gọi giá tiền một quả trứng gà và một quả trứng vịt lần lượt là  $x$  và  $y$  đồng ( $x; y \in \mathbb{N}$ )

Dựa vào đề bài lập hệ phương trình.

Giải hệ phương trình đó để tính giá tiền một quả trứng gà và một quả trứng vịt.

Từ đó tính số tiền mua 62 quả trứng gồm 22 quả trứng gà và 40 quả trứng vịt.

### Lời giải

Gọi giá tiền một quả trứng gà và một quả trứng vịt lần lượt là  $x$  và  $y$  đồng ( $x; y \in \mathbb{N}$ )

Vì mua 24 quả trứng gà và 13 quả trứng vịt hết 91200 đồng nên ta có phương trình:

$$24x + 13y = 91200.$$

Vì mua 48 quả trứng gà và 36 quả trứng vịt hết 206400 đồng nên ta có phương trình:

$$48x + 36y = 206400 \text{ hay } 4x + 3y = 17200.$$

Ta có hệ phương trình 
$$\begin{cases} 24x + 13y = 91200 \\ 4x + 3y = 17200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x + 13y = 91200 \\ 24x + 18y = 103200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = 12000 \\ 4x + 3y = 17200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2400 \\ 4x + 3 \cdot 2400 = 17200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2400(TM) \\ x = 2500(TM) \end{cases}$$

Vậy số tiền mua 22 quả trứng gà và 40 quả trứng vịt là:  $2500 \cdot 22 + 2400 \cdot 40 = 151000$  đồng.

**Bài 4.** Một trường trung học dự định tổ chức chuyên tham quan học tập thực tế cho học sinh khối 9 tại một bảo tàng và công viên khoa học (Science Park) trong 1 ngày (trong ngày từ 7h00 đến 17h00). Tổng kinh phí nhà trường dự trù là 20 triệu đồng, bao gồm chi phí thuê xe đưa đón và bữa ăn cho học sinh. Gọi  $x$  là số bạn có thể tham gia chuyên tham quan. (học sinh,  $x > 0$ )

- Giá thuê xe là 5 triệu đồng/ngày.
- Vé vào cổng mỗi học sinh là 30 000 đồng.
- Bữa ăn trưa cho mỗi học sinh có giá 50 000 đồng.

Trường có thể tổ chức cho tối đa bao nhiêu người?

### Phương pháp

Vì chuyên tham quan từ 7h00 đến 17h00, mỗi học sinh sẽ có chi phí vé vào cổng và bữa ăn trưa nên ta cần tính chi phí cho một học sinh đi tham quan.

Tổng chi phí nhà trường phải trả bao gồm chi phí cho  $x$  học sinh tham gia và chi phí thuê xe một ngày.

Vì tổng kinh phí nhà trường dự trù là 20 triệu đồng nên tổng chi phí không được quá 20 triệu đồng. Từ đó ta lập được bất phương trình.

Giải bất phương trình để tìm  $x$ .

### Lời giải

Vì chuyến tham quan từ 7h00 đến 17h00, mỗi học sinh sẽ có chi phí vé vào cổng và bữa ăn trưa nên chi phí cho một học sinh đi tham quan là:

$$30\,000 + 50\,000 = 80\,000 \text{ (đồng)}$$

Tổng chi phí nhà trường phải trả bao gồm chi phí cho  $x$  học sinh tham gia và chi phí thuê xe một ngày là:

$$80\,000x + 5\,000\,000 \text{ (đồng)}$$

Vì tổng kinh phí nhà trường dự trù là 20 triệu đồng nên ta có bất phương trình:

$$80\,000x + 5\,000\,000 \leq 20\,000\,000$$

Giải bất phương trình:

$$80\,000x + 5\,000\,000 \leq 20\,000\,000$$

$$80\,000x \leq 15\,000\,000 \text{ (cộng cả hai vế với } -5\,000\,000)$$

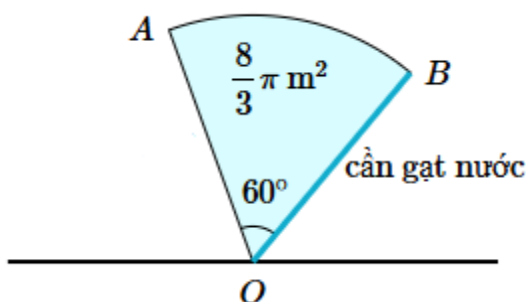
$$x \leq \frac{15\,000\,000}{80\,000} \text{ (nhân cả hai vế với } \frac{1}{80\,000})$$

$$x \leq 187,5$$

Vì số học sinh phải là số nguyên nên số học sinh tối đa là 187.

Trường có thể tổ chức cho tối đa 187 học sinh tham gia chuyến tham quan này.

**Bài 5.** Một đầu của cần gạt nước được cố định tại điểm  $O$ . Khi đầu còn lại của cần gạt xoay  $60^\circ$ , nó sẽ quét được một vùng có diện tích bằng  $\frac{8}{3}\pi(m^2)$ .



Chiều dài của cần gạt nước là bao nhiêu cm?

### Phương pháp

Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt tròn:  $S_q = \frac{\pi R^2 n}{360}$ .

### Lời giải

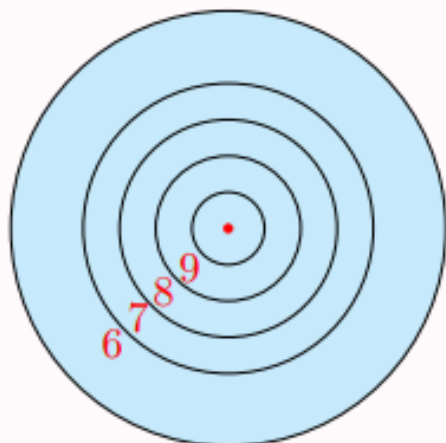
Vì diện tích hình quạt tròn là  $\frac{8}{3}\pi$  nên ta có:  $\frac{\pi \cdot R^2 \cdot 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{8}{3}\pi$ .

$$\text{Suy ra } R^2 = \frac{8}{3}\pi : \frac{\pi}{6} = 16.$$

$$\text{Do đó } R = \sqrt{16} = 4(m).$$

Vậy chiều dài của cần gạt nước là 4m.

**Bài 6.** Một tấm bia tạo bởi năm đường tròn đồng tâm lần lượt có bán kính 5cm, 10cm, 15cm, 20cm và 30cm. Giả thiết rằng người chơi ném phi tiêu một cách ngẫu nhiên và luôn trúng bia. Tính xác suất ném trúng vòng 8 (hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba). Biết rằng xác suất cần tìm bằng tỉ số giữa diện tích của hình vành khuyên tương ứng với diện tích của hình tròn lớn nhất.



### Phương pháp

Sử dụng công thức tính diện tích hình vành khuyên để tính diện tích hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba:  $S_{vk} = \pi(R^2 - r^2)$  với  $R > r$ .

Sử dụng công thức tính diện tích hình tròn để tính diện tích hình tròn lớn nhất:  $S = \pi r^2$

Tính tỉ số giữa diện tích của hình vành khuyên tương ứng với diện tích của hình tròn lớn nhất

### Lời giải

Vì bán kính của đường tròn thứ hai và thứ ba lần lượt là 10cm và 15cm nên diện tích hình vành khuyên nằm giữa đường tròn thứ hai và thứ ba là:

$$S_{vk} = \pi(15^2 - 10^2) = 125\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vì hình tròn lớn nhất có bán kính là 30cm nên diện tích hình tròn lớn nhất:

$$S = 30^2 \cdot \pi = 900\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Xác suất ném trúng vòng 8 là:  $\frac{S_{vk}}{S} = \frac{125\pi}{900\pi} = \frac{5}{36}$

Vậy xác suất ném trúng vòng 8 là  $\frac{5}{36}$ .

**Bài 7.** Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ các đường kính AOB, AO'C. Gọi DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn,  $D \in (O)$  và  $E \in (O')$ . Gọi M là giao điểm của BD và CE.

a) Tính số đo của  $\angle DAE$ .

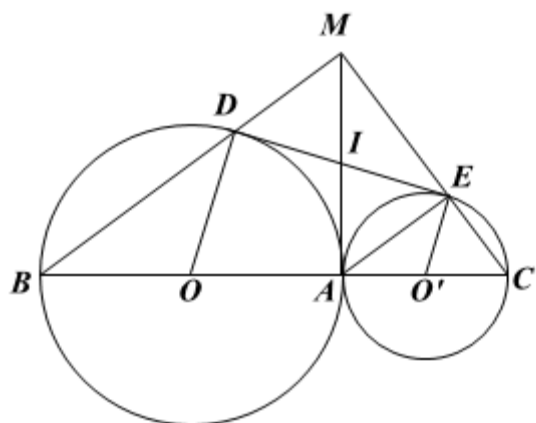
b) Tứ giác ADME là hình gì?

c) Chứng minh MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

### Phương pháp

Vận dụng kiến thức về vị trí tương đối của hai đường tròn liên quan đến trường hợp hai đường tròn không cắt nhau.

**Lời giải**



Từ A kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, tiếp tuyến này cắt DE tại I.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có  $ID = IA = IE$  nên  $\triangle DAE$  vuông tại A. Suy ra  $DAE = 90^\circ$ .

b) Vì AB và AC là các đường kính của (O) và (O') nên  $ADB = AEC = 90^\circ$ .

Suy ra  $ADM = AEM = 90^\circ$ .

Mà  $DAE = 90^\circ$  nên tứ giác ADME là hình chữ nhật.

c) Vì tứ giác ADME là hình chữ nhật nên 3 điểm M, I, A thẳng hàng.

Do vậy MA là tiếp tuyến chung của hai đường trong (O); (O').

**Bài 8.** Cho đường tròn (O;R) đường kính AB và điểm C thuộc đường tròn (O) (C khác A và B). Kẻ CH vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại C và  $CH^2 = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A$ .

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC ở D. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh đường thẳng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt IC ở K. Xác định vị trí điểm C trên đường tròn (O) để diện tích tứ giác ABKI nhỏ nhất.

**Phương pháp**

a) Chứng minh tam giác ACH và tam giác CHB vuông nên viết các hệ thức lượng liên quan đến cạnh CH.

Chứng minh  $CAB = HCB$  nên  $\cos CAB = \cos HCB$  suy ra điều phải chứng minh.

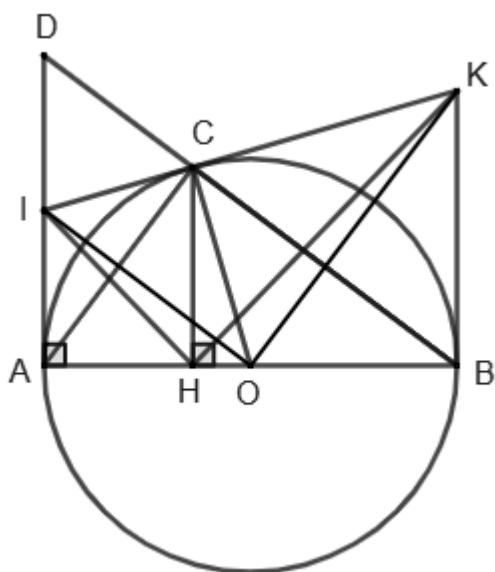
b) Chứng minh  $\triangle IAO = \triangle ICO$  (c.c.c) suy ra  $IOA = ICO = 90^\circ$  hay  $IC \perp OC$  tại C.

c) Chứng minh  $\triangle AIO = \triangle CIO$  và  $\triangle KCO = \triangle KBO$ .

Biểu diễn  $S_{AIBK}$  theo  $S_{AIOK}$ .

Suy ra diện tích nhỏ nhất của  $S_{AIBK}$  theo R.

Lời giải



a) Vì AB là đường kính của (O) và  $C \in (O)$  suy ra  $\Delta ABC$  vuông tại C.

Vì CH vuông góc với AB tại H nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$CH = AC \cdot \sin A \text{ (tam giác ACH vuông tại H)}$$

và  $CH = BC \cdot \cos HCB$  (tam giác CHB vuông tại H).

Mà  $CAB = HCB$  (cùng phụ với  $ACH$ ) nên  $\cos CAB = \cos HCB$  hay  $\cos A = \cos HCB$ . Do đó  $CH = BC \cdot \cos A$ .

$$\text{Do đó } CH^2 = (AC \cdot \sin A)(BC \cdot \cos A) = AC \cdot BC \cdot \sin A \cdot \cos A.$$

b) Ta có  $CI = IA = ID$  (đường trung tuyến trong tam giác vuông)

Xét tam giác IAO và tam giác ICO có:

$$AO = OB = R$$

$$IA = IC \text{ (cmt)}$$

OI chung

Suy ra  $\Delta IAO = \Delta ICO$  (c.c.c), do đó  $\angle IOA = \angle ICO = 90^\circ$  hay  $IC \perp OC$  tại C.

Vậy IC là tiếp tuyến của (O) tại điểm C.

c) Theo ý b, ta có  $\Delta AIO = \Delta CIO$  (c.c.c).

Chứng minh tương tự, ta có  $\Delta KCO = \Delta KBO$  (c.c.c).

$$\text{Mà } S_{AIKB} = S_{\Delta AIO} + S_{\Delta CIO} + S_{\Delta COK} + S_{\Delta KOB} = 2(S_{\Delta CIO} + S_{\Delta COK})$$

$$\text{Suy ra } S_{AIKB} = 2 \cdot S_{\Delta OKC} = OC \cdot IK = R \cdot IK \geq R \cdot AB = R \cdot 2R = 2R^2$$

Đấu “=” xảy ra khi  $IK = AB$ . Khi đó C là điểm chính giữa AB.

Vậy  $S_{AIKB}$  có giá trị lớn nhất là  $2R^2$  khi  $C$  là điểm chính giữa  $AB$ .

**Bài 9.** Để rào một khu đất có hai phần hình chữ nhật cho gia đình trồng hoa kiểng, một bác nông dân sử dụng 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E trước khuôn viên nhà dọc theo một con sông (như hình vẽ). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét.



Tính diện tích đất lớn nhất bác nông dân rào được.

### Phương pháp

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .

### Lời giải

Gọi độ dài của hàng rào song song với bờ sông là  $x$  ( $m, x > 0$ );

độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là  $y$  ( $m, y > 0$ ).

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là:  $xy$  ( $m^2$ ).

Tổng chi phí là 15 000 000 đồng nên ta có phương trình:

$$60000 \cdot x + 50000 \cdot 3y = 15000000$$

$$\text{hay } 6x + 15y = 1500 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 15y} = 2\sqrt{90xy} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2\sqrt{90xy} \leq 1500$$

$$\sqrt{90xy} \leq 750 \quad (\text{nhân cả hai vế với } \frac{1}{2})$$

$$90xy \leq 750^2 \quad \text{hay } 90xy \leq 562500$$

$$\text{Suy ra } xy \leq \frac{562500}{90} \quad \text{hay } xy \leq 6250$$

Dấu “=” xảy ra là giá trị lớn nhất của  $xy$ . Do đó  $xy$  lớn nhất bằng 6250.

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể rào là  $6250m^2$ .

**Bài 10.** Tính giá trị của  $A = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$ .

### Phương pháp

Sử dụng công thức  $k\sqrt{k-1} + (k-1)\sqrt{k} = \sqrt{k(k-1)}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})$  với  $k \geq 1$ .

### Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & k\sqrt{k-1} + (k-1)\sqrt{k} \\ &= \sqrt{k} \cdot \sqrt{k-1} \cdot (\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) \\ &= \sqrt{k(k-1)}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) \text{ với } k \geq 1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k\sqrt{k-1} + (k-1)\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})} \\ &= \frac{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}{\sqrt{k(k-1)}(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})} \\ &= \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k(k-1)}} \\ &= \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Thay lại vào A ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024} + 2024\sqrt{2025}} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}. \end{aligned}$$

Vậy  $A = \frac{44}{45}$ .