

ĐỀ THI HỌC KÌ I – Đề số 11

Môn: Toán học - Lớp 10

Bộ sách Cánh diều

BIÊN SOẠN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM



Mục tiêu

- Ôn tập lý thuyết học kì I của chương trình sách giáo khoa Toán 10 – Cánh diều.
- Vận dụng linh hoạt lý thuyết đã học trong việc giải quyết các câu hỏi trắc nghiệm Toán học.
- Tổng hợp kiến thức dạng hệ thống, dần trải tất cả các chương học kì I – chương trình Toán 10.

Phần I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

- A. Trời hôm nay đẹp quá!
- B. New York là thủ đô của Việt Nam.
- C. Con đang làm gì đó?
- D. Số 3 có phải số tự nhiên không?

Câu 2. Dùng các kí hiệu khoảng, đoạn, nửa khoảng viết lại tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\}$ là

- A. $(-5;3)$
- B. $(-5;3]$
- C. $[-5;3]$
- D. $[-5;3)$

Câu 3. Cặp số $(-2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

- A. $2x + y + 1 > 0$
- B. $x + 3y + 1 < 0$
- C. $2x - y - 1 \geq 0$
- D. $x + y + 1 > 0$

Câu 4. Trong các hệ sau, hệ nào không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $\begin{cases} x + y > 0 \\ x > 1 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 5 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 2x + 3y > 10 \\ x - 4y < 1 \end{cases}$

$$D. \begin{cases} y > 0 \\ x - 4 \leq 1 \end{cases}$$

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\sin 30^\circ = -\sin 150^\circ$

B. $\tan 30^\circ = -\tan 150^\circ$

C. $\cot 30^\circ = -\cot 150^\circ$

D. $\cos 30^\circ = -\cos 150^\circ$

Câu 6. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$. Chọn mệnh đề sai?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

B. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

C. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

D. $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C$

Câu 7. Cho tam giác ABC. Số các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC là

A. 3

B. 6

C. 2

D. 1

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Câu 9. Cho parabol (P): $y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P)?

A. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

B. $I(0; 1)$

C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Câu 10. Cho tam giác ABC có $\angle C = 30^\circ$, $AB = 5$, $BC = 8$. Tính $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

A. 20

B. $20\sqrt{3}$

C. $20\sqrt{2}$

D. $40\sqrt{3}$

Câu 11. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai

B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai

C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai

D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai

Câu 12. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

A. $S = \{6\}$

B. $S = \{2\}$

C. $S = \{2;6\}$

D. $S = \emptyset$

Phần II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. An thích ăn hai loại trái cây là cam và xoài. Mỗi tuần, mẹ cho An 200000 đồng để mua trái cây. Biết rằng giá cam là 15000 đồng/kg, giá xoài là 30000 đồng/kg. Gọi x, y lần lượt là số kg cam và xoài mà An có thể mua về sử dụng trong một tuần.

a) Trong tuần, số tiền An có thể mua cam là $15000x$, số tiền An có thể mua xoài là $30000y$ ($x, y > 0$).

b) Bất phương trình bậc nhất cho hai ẩn x, y là $3x + 6y \geq 40$.

c) Cặp số (5;4) thỏa mãn bất phương trình bậc nhất cho hai ẩn x, y.

d) An có thể mua 4 kg cam, 5 kg xoài trong tuần.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $A = 60^\circ$, $AC = 12$, $AB = 20$.

a) $\cos C = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

b) $BC = 4\sqrt{19}$.

c) $C \approx 83,4^\circ$ (làm tròn đến hàng phần mười).

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 4\sqrt{57}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$.

b) $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

c) $\vec{GA} = \vec{GM} + \vec{GN}$.

d) $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{GM} + \vec{GN}$.

Câu 4. Cho tam thức bậc hai $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{x+6}{x^3-8}$.

a) Điều kiện xác định của $f(x)$ là $x \neq 2$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

c) $f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

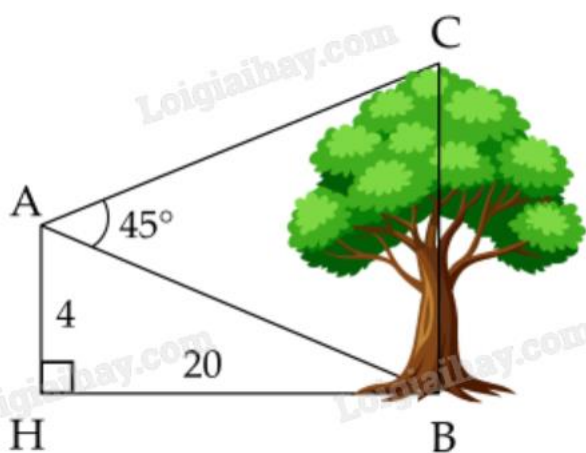
d) $f(x) < 0 \quad \forall x \in (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hai tập hợp $A = [m - 3; m + 2]$, $B = (-3; 5)$ với $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để $A \subset B$?

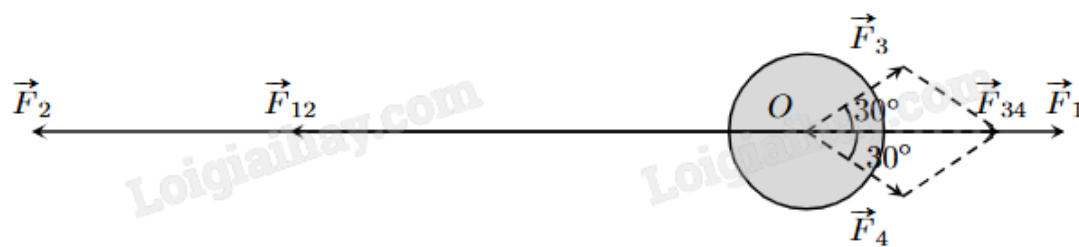
Câu 2. Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể người. Theo đó một người mỗi ngày có thể tiếp nhận được không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B; một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn 3 lần số đơn vị vitamin A. Giá của một đơn vị vitamin A là 9 đồng, giá của một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng. Hỏi cần chi ít nhất bao nhiêu tiền mỗi ngày để dùng đủ cả hai loại vitamin trên?

Câu 3. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $\angle BAC = 45^\circ$. Tính chiều cao của cây (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 4. Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là \vec{F}_1 và \vec{F}_2 , trong đó độ lớn lực \vec{F}_2 lớn gấp ba lần độ lớn lực \vec{F}_1 . Để giữ đứng yên, người ta cần tác dụng thêm hai lực \vec{F}_3 và \vec{F}_4 , mỗi lực có độ

lớn bằng 30 N và hợp với \vec{F}_1 một góc 30° . Tính tổng độ lớn của hai lực \vec{F}_1 và \vec{F}_2 (làm tròn kết quả đến hàng phân mười).



Câu 5. Giả sử hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(0;5)$ và có đỉnh $I(3;-4)$. Tìm $a + b + c$.

Câu 6. Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần so với lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kỹ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm đề số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ x là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

----- Hết -----

**Phần I: Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (3 điểm)**

| | | | | | |
|------|------|------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. D | 3. D | 4. B | 5. A | 6. C |
| 7. B | 8. A | 9. C | 10. B | 11. A | 12. A |

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

- A. Trời hôm nay đẹp quá!
- B. New York là thủ đô của Việt Nam.
- C. Con đang làm gì đó?
- D. Số 3 có phải số tự nhiên không?

Phương pháp giải:

Mệnh đề là một khẳng định có tính đúng sai.

Lời giải chi tiết:

B là một mệnh đề. Các đáp án còn lại là câu cảm thán hoặc câu hỏi.

Đáp án B.

Câu 2. Dùng các kí hiệu khoảng, đoạn, nửa khoảng viết lại tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\}$ là

- A. $(-5;3)$
- B. $(-5;3]$
- C. $[-5;3]$
- D. $[-5;3)$

Phương pháp giải:

Áp dụng quy tắc viết các tập con của tập số thực $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a;b)$.

Lời giải chi tiết:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\} = [-5;3).$$

Đáp án D.

Câu 3. Cặp số $(-2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

- A. $2x + y + 1 > 0$
- B. $x + 3y + 1 < 0$
- C. $2x - y - 1 \geq 0$
- D. $x + y + 1 > 0$

Phương pháp giải:

Thay cặp số vào từng bất phương trình, nếu thỏa mãn thì là nghiệm của bất phương trình đó.

Lời giải chi tiết:

Xét A: $2 \cdot (-2) + 3 + 1 > 0$ sai nên $(-2;3)$ không là nghiệm của $2x + y + 1 > 0$.

Xét B: $-2 + 3 \cdot 3 + 1 < 0$ sai nên $(-2; 3)$ không là nghiệm của $x + 3y + 1 < 0$.

Xét C: $2 \cdot (-2) - 3 - 1 \geq 0$ sai nên $(-2; 3)$ không là nghiệm của $2x - y - 1 \geq 0$.

Xét D: $-2 + 3 + 1 > 0$ đúng nên $(-2; 3)$ là nghiệm của $x + y + 1 > 0$.

Đáp án D.

Câu 4. Trong các hệ sau, hệ nào không phải là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A.
$$\begin{cases} x + y > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 2x + 3y > 10 \\ x - 4y < 1 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y > 0 \\ x - 4 \leq 1 \end{cases}$$

Phương pháp giải:

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ gồm các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Lời giải chi tiết:

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 5 \end{cases} \text{ là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.}$$

Đáp án B.

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\sin 30^\circ = -\sin 150^\circ$

B. $\tan 30^\circ = -\tan 150^\circ$

C. $\cot 30^\circ = -\cot 150^\circ$

D. $\cos 30^\circ = -\cos 150^\circ$

Phương pháp giải:

Các góc bù nhau có giá trị sin bằng nhau, giá trị cos, tan, cot đối nhau.

Lời giải chi tiết:

$$\sin 30^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 150^\circ.$$

Đáp án A.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$. Chọn mệnh đề sai?

A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

B. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

C. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

D. $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C$

Phương pháp giải:

Sử dụng định lí Cosin trong tam giác ABC.

Lời giải chi tiết:

Theo định lí Cosin: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ nên C sai.

Đáp án C.

Câu 7. Cho tam giác ABC. Số các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC là

A. 3

B. 6

C. 2

D. 1

Phương pháp giải:

Vecto là một đoạn thẳng có hướng. Từ hai điểm phân biệt, ta có hai vectơ khác nhau.

Lời giải chi tiết:

Có 6 vectơ khác $\vec{0}$ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$.

Đáp án B.

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

C. $D = \mathbb{R}$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Phương pháp giải:

Hàm phân thức xác định khi mẫu thức khác 0.

Lời giải chi tiết:

Điều kiện xác định của $y = \frac{x-2}{x-1}$ là $x-1 \neq 0$ hay $x \neq 1$.

Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đáp án A.

Câu 9. Cho parabol (P): $y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P)?

A. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

B. $I(0;1)$

C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

Phương pháp giải:

Hoành độ điểm đỉnh của parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ là $x = -\frac{b}{2a}$.

Thay vào hàm số tính y.

Lời giải chi tiết:

Hoành độ điểm đỉnh của parabol (P): $y = 3x^2 - 2x + 1$ là $x = -\frac{-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$.

Tung độ điểm đỉnh của parabol (P): $y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.

Đáp án A.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = 5$, $BC = 8$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. 20

B. $20\sqrt{3}$

C. $20\sqrt{2}$

D. $40\sqrt{3}$

Phương pháp giải:

Công thức tính tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải chi tiết:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cos \angle ABC = 5 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}.$$

Đáp án B.

Câu 11. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai

B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai

C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai

D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai

Phương pháp giải:

Tam thức bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Lời giải chi tiết:

$f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Đáp án A.

Câu 12. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

- A. $S = \{6\}$
 B. $S = \{2\}$
 C. $S = \{2;6\}$
 D. $S = \emptyset$

Phương pháp giải:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải chi tiết:

$$\sqrt{2x-3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 = x^2 - 6x + 9 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Đáp án A.

Phần II: Trắc nghiệm đúng sai (4 điểm)

Câu 1. An thích ăn hai loại trái cây là cam và xoài. Mỗi tuần, mẹ cho An 200000 đồng để mua trái cây. Biết rằng giá cam là 15000 đồng/kg, giá xoài là 30000 đồng/kg. Gọi x, y lần lượt là số kg cam và xoài mà An có thể mua về sử dụng trong một tuần.

- a) Trong tuần, số tiền An có thể mua cam là $15000x$, số tiền An có thể mua xoài là $30000y$ ($x, y > 0$).
 b) Bất phương trình bậc nhất cho hai ẩn x, y là $3x + 6y \geq 40$.
 c) Cặp số $(5;4)$ thỏa mãn bất phương trình bậc nhất cho hai ẩn x, y .
 d) An có thể mua 4 kg cam, 5 kg xoài trong tuần.

Phương pháp giải:

Ứng dụng bất phương trình bậc nhất hai ẩn để giải.

Lời giải chi tiết:

a) **Đúng.** Trong tuần, số tiền An có thể mua cam là $15000x$, số tiền An có thể mua xoài là $30000y$ ($x, y > 0$).

b) **Sai.** Vì mỗi tuần An chỉ có 200000 đồng nên ta có bất phương trình:

$$15000x + 30000y \leq 200000 \Leftrightarrow 3x + 6y \leq 40.$$

c) **Đúng.** Thay cặp số $(5;4)$ vào bất phương trình vừa tìm: $3.5 + 6.4 \leq 40$ (đúng).

Vậy $(5;4)$ là một nghiệm của bất phương trình.

d) **Sai.** Thay cặp số $(5;4)$ vào bất phương trình vừa tìm: $3.4 + 6.5 \leq 40$ (sai).

Suy ra $(4;5)$ không là nghiệm của bất phương trình.

Vậy An không thể mua 4 kg cam và 5 kg xoài trong tuần.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $A = 60^\circ$, $AC = 12$, $AB = 20$.

a) $\cos C = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

b) $BC = 4\sqrt{19}$.

c) $C \approx 83,4^\circ$ (làm tròn đến hàng phần mười).

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 4\sqrt{57}$.

Phương pháp giải:

Sử dụng định lý Sin, Cosin trong tam giác.

Lời giải chi tiết:

a) Sai. Theo hệ quả định lý Cos trong tam giác ABC: $\cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2.CA.CB}$.

b) Đúng. Theo định lý Cos trong tam giác ABC:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos A = 20^2 + 12^2 - 2.20.12.\cos 60^\circ = 304.$$

Suy ra $BC = 4\sqrt{19}$.

c) Đúng. $\cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2.CA.CB} = \frac{12^2 + (4\sqrt{19})^2 - 20^2}{2.4\sqrt{19}.20} = \frac{\sqrt{19}}{38} \approx 83,4^\circ$.

d) Sai. Áp dụng định lý Sin trong tam giác ABC:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{19}}{2\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{57}}{3}.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC.

a) $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$.

b) $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

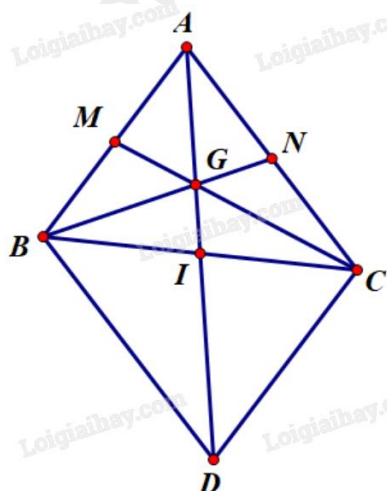
c) $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$.

Phương pháp giải:

Sử dụng quy tắc hình bình hành, quy tắc trung điểm, trọng tâm.

Lời giải chi tiết:



a) Sai. $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ do hai vecto trên ngược hướng và $GN = \frac{1}{2}GB$ (tính chất trọng tâm).

b) Đúng. $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$ do hai vecto trên ngược hướng và $GM = \frac{1}{2}GC$ (tính chất trọng tâm).

c) Sai. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, hay $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AG}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}.$$

d) Sai. Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó A, G, I thẳng hàng (trọng tâm G thuộc trung tuyến AM).

Lấy điểm D sao cho ABDC là hình bình hành. Khi đó I là trung điểm của AD.

$$\text{Theo chứng minh trên, } \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$$

Mà $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành).

$$\text{Vậy } \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Câu 4. Cho tam thức bậc hai $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{x+6}{x^3-8}$.

a) Điều kiện xác định của $f(x)$ là $x \neq 2$.

$$\text{b) } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

c) $f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

d) $f(x) < 0 \quad \forall x \in (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Phương pháp giải:

Tìm tập xác định, nghiệm của $f(x)$ và lập bảng xét dấu.

Lời giải chi tiết:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{x+6}{x^3-8} = \frac{(x^2+2x+4)-(x+6)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2+x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

a) Đúng. Điều kiện:

$$(x-2)(x^2+2x+4) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x^2+2x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2 \quad (\text{vì } x^2+2x+4 \neq 0 \text{ luôn đúng}).$$

$$\text{b) Đúng. } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

c) Sai. Bảng xét dấu:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----------|----|---|---|---|---|--|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
| $x^2 + x - 2$ | | + | 0 | - | 0 | + | | + |
| $x - 2$ | | - | | - | | 0 | | + |
| $x^2 + 2x + 4$ | | + | | + | | + | | + |
| f(x) | | - | 0 | + | 0 | - | | + |

Theo bảng xét dấu: $f(x) > 0 \quad \forall x \in (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

d) Sai. Theo bảng xét dấu: $f(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

Phần III: Trắc nghiệm trả lời ngắn (3 điểm)

Câu 1. Cho hai tập hợp $A = [m - 3; m + 2]$, $B = (-3; 5)$ với $m \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để $A \subset B$?

Phương pháp giải:

$A \subset B$ thì mọi phần tử thuộc A đều thuộc B.

Lời giải chi tiết:

$$A \subset B \text{ suy ra } \begin{cases} m - 3 > -3 \\ m + 2 < 5 \end{cases} \text{ hay } 0 < m < 3.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên m thỏa mãn là $m = 1; m = 2$.

Đáp án: 2.

Câu 2. Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể người. Theo đó một người mỗi ngày có thể tiếp nhận được không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B; một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn 3 lần số đơn vị vitamin A. Giá của một đơn vị vitamin A là 9 đồng, giá của một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng. Hỏi cần chi ít nhất bao nhiêu tiền mỗi ngày để dùng đủ cả hai loại vitamin trên?

Phương pháp giải:

Ứng dụng hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Lời giải chi tiết:

Gọi x, y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B dùng mỗi ngày ($x, y \geq 0$).

Mỗi ngày có thể tiếp nhận được không quá 600 đơn vị vitamin A nên $x \leq 600$.

Mỗi ngày có thể tiếp nhận được không quá 500 đơn vị vitamin B nên $y \leq 500$.

Mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên $400 \leq x + y \leq 1000$.

Mỗi ngày, số đơn vị vitamin B không ít hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn 3 lần số đơn vị

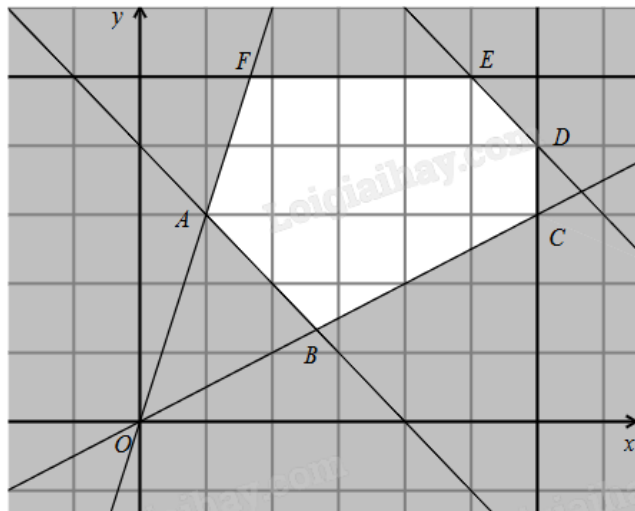
vitamin A nên $\frac{1}{2}x \leq y \leq 3x$.

Ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600 \\ 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \text{ (*)} \\ \frac{1}{2}x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

Số tiền cần chi là $f(x; y) = 9x + 7,5y$ (đồng).

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).



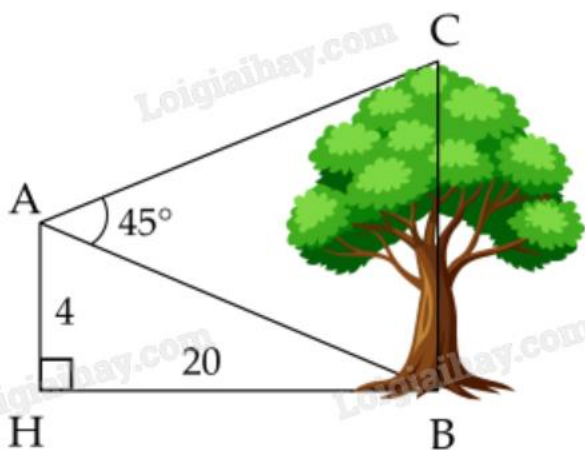
Miền nghiệm của hệ (*) là miền lục giác ABCDEF (kể cả biên) với $A(100; 300)$, $B\left(\frac{800}{3}; \frac{400}{3}\right)$, $C(600; 300)$, $E(500; 500)$, $F\left(\frac{500}{3}; 500\right)$.

Thay tọa độ các điểm trên vào $f(x; y)$ thấy $f(100; 300) = 3150$ là giá trị nhỏ nhất.

Vậy cần chi ít nhất 3150 đồng mỗi ngày để dùng đủ lượng vitamin A và B.

Đáp án: 900.

Câu 3. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $BAC = 45^\circ$. Tính chiều cao của cây (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Phương pháp giải:

Sử dụng định lí Sin cho tam giác ABC.

Lời giải chi tiết:

Trong tam giác vuông AHB có $\tan ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Suy ra $ABH \approx 11^\circ 19'$.

Ta có $ABH + ABC = 90^\circ$ suy ra $ABC = 90^\circ - ABH \approx 90^\circ - 11^\circ 19' \approx 78^\circ 41'$.

Xét tam giác ABC có $ACB = 180^\circ - (ABC + BAC) \approx 180^\circ - (78^\circ 41' + 45^\circ) \approx 56^\circ 19'$.

Áp dụng định lí Sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AB}{\sin ACB} \text{ suy ra } BC = \frac{AB \cdot \sin BAC}{\sin ACB} \approx \frac{\sqrt{4^2 + 20^2} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 56^\circ 19'} \approx 17 \text{ (m)}.$$

Đáp án: 17.

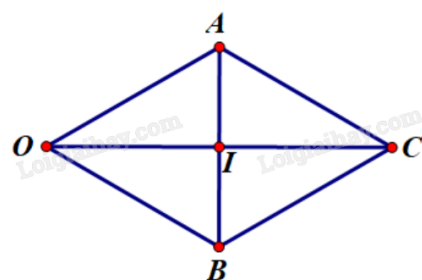
Câu 4. Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là \vec{F}_1 và \vec{F}_2 , trong đó độ lớn lực \vec{F}_2 lớn gấp ba lần độ lớn lực \vec{F}_1 . Để giữ đứng yên, người ta cần tác dụng thêm hai lực \vec{F}_3 và \vec{F}_4 , mỗi lực có độ lớn bằng 30 N và hợp với \vec{F}_1 một góc 30° . Tính tổng độ lớn của hai lực \vec{F}_3 và \vec{F}_4 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Phương pháp giải:

Sử dụng quy tắc tổng hợp lực, quy tắc hình bình hành.

Lời giải chi tiết:



Dựng hình bình hành OACB sao cho $OA = OB = 30$, $AOC = BOC = 30^\circ$ và \vec{OC} cùng hướng với \vec{F}_1 .

Khi đó $|\vec{F}_3| = |\vec{OA}| = OA = 30$, $|\vec{F}_4| = |\vec{OB}| = OB = 30$, $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_{34} = \vec{OC}$ và $|\vec{F}_{34}| = |\vec{OC}|$.

Vì $OA = OB$ nên OACB là hình thoi. Giả sử I là tâm hình thoi. Xét tam giác AOI vuông tại I:

$$\cos OAI = \frac{OI}{OA} \Rightarrow OI = OA \cdot \cos OAI = 30 \cdot \cos 30^\circ = 15\sqrt{3} \Rightarrow OC = 2OI = 30\sqrt{3} = |\vec{F}_{34}|.$$

Vì độ lớn lực \vec{F}_2 lớn gấp ba lần độ lớn lực \vec{F}_1 và hai lực này ngược chiều nên $\vec{F}_2 = -3\vec{F}_1$.

Dưới tác động của 4 lực, vật ở vị trí cân bằng nên ta có:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_1 - 3\vec{F}_1 + \vec{F}_{34} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{34} = 2\vec{F}_1 \Rightarrow |\vec{F}_{34}| = 2|\vec{F}_1| = 30\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{F}_1| = 15\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = 3|\vec{F}_1| = 3 \cdot 15\sqrt{3} = 45\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 15\sqrt{3} + 45\sqrt{3} = 60\sqrt{3} \approx 104 \text{ (N)}.$$

Đáp án: 104.

Câu 5. Giả sử hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(0;5)$ và có đỉnh $I(3;-4)$. Tìm $a + b + c$.

Phương pháp giải:

Thay tọa độ các điểm đồ thị đi qua vào hàm số, sử dụng công thức tọa độ điểm đỉnh để tìm các hệ số.

Lời giải chi tiết:

(P) đi qua $A(0;5)$ nên $c = 5$.

$$\text{Hoành độ điểm đỉnh là } x_1 = \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow 6a + b = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, điểm } I(3;-4) \text{ thuộc (P) nên } -4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 5 \Rightarrow 3a + b = -3 \quad (2)$$

Giải hệ (1), (2) ta có $a = 1$, $b = -6$.

$$\text{Vậy } a + b + c = 1 + (-6) + 5 = 0.$$

Đáp án: 0.

Câu 6. Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần so với lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kỹ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm đề số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ x là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

Phương pháp giải:

Lập phương trình bậc hai theo ẩn x mô tả số lượng cá rồi giải ra nghiệm.

Lời giải chi tiết:

Sau 1 năm, số lượng cá trong hồ là $1000 + 1000x = 1000(1 + x)$ (con).

Sau 2 năm, số lượng cá trong hồ là $1000(1 + x) + 1000(1 + x) = 1000(1 + x)^2$ (con).

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Để số lượng cá trong hồ sau 2 năm là 36000 thì ta có } 1000(1 + x)^2 = 36000 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -7 \end{cases}.$$

Loại $x = -7$.

Vậy tốc độ tăng số cá mỗi năm là $x = 5$.

Đáp án: 5.