

Thời gian: 120 phút

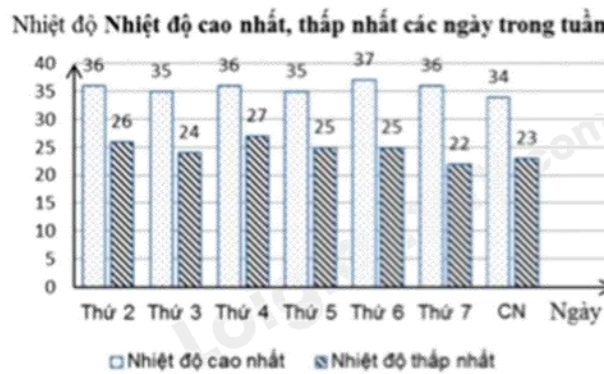
Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2}$

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
b) Tìm những điểm M thuộc (P) có tung độ và hoành độ bằng nhau.

Câu 2: Cho phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$

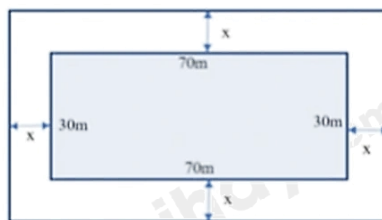
- a) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.
b) Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức

Câu 3: Biên độ nhiệt là khoảng cách chênh lệch giữa nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất trong cùng một khoảng thời gian nhất định (một ngày, một tháng, một năm,...) của cùng một vùng địa lí. Biểu đồ cột kép dưới đây biểu diễn nhiệt độ (độ C) các ngày trong một tuần tại Thành phố Hồ Chí Minh.



- a) Trong tuần này, ngày có biên độ nhiệt lớn nhất của thành phố Hồ Chí Minh là thứ mấy?
b) Chọn ngẫu nhiên một ngày trong tuần, tính xác suất của các biến cố sau:
A: “Ngày được chọn có nhiệt độ cao nhất không quá 35 độ C”.
B: “Ngày được chọn có biên độ nhiệt nhỏ hơn 12 độ C”.

Câu 4: Một khu vườn hình chữ nhật (phần in đậm) có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 70m và 30m. Người ta dự tính mở rộng thêm khu vườn bằng cách cải tạo thêm X (mét) về phía ngoài của chiều dài và chiều rộng khu vườn như hình vẽ.



- a) Viết biểu thức S biểu diễn theo X diện tích của khu vườn hình chữ nhật sau khi mở rộng.
b) Biết rằng sau khi mở rộng thì diện tích của khu vườn lớn hơn diện tích ban đầu $1150m^2$.
Tìm giá trị của X (làm tròn đến hàng phần mười của mét).

Câu 5: Một quả dưa hấu không hạt ruột đỏ dạng hình cầu có đường kính 25cm và phần vỏ dày 2cm.

a) Coi phần ruột màu đỏ cũng có dạng hình cầu có cùng tâm với quả dưa hấu. Tính thể tích phần ruột quả dưa hấu.

(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^3)

b) Người ta ép phần ruột màu đỏ của quả dưa hấu trên thì thể tích nước ép thu được bằng 80% thể tích phần ruột. Nước ép dưa hấu sẽ được đựng trong các ly thủy tinh giống nhau, phần lòng trong dạng hình trụ có chiều cao 10cm và đường kính đáy lòng trong là 5cm. Mỗi ly chỉ chứa 70% thể tích. Hỏi để đựng nước ép của quả dưa hấu nói trên thì cần ít nhất bao nhiêu cái ly?

Biết công thức thể tích hình trụ là $V = pR^2h$ (R là bán kính đáy; h là chiều cao); công thức tính thể tích hình

cầu là $V = \frac{4}{3} pR^3$.



Câu 6: Thép không gỉ Ferritic là họ thép hợp kim có chứa từ 12 đến 27 phần trăm crôm. Một nhà máy luyện thép hiện có sẵn một lượng hợp kim thép chứa 10% crôm và một lượng hợp kim thép chứa 30% crôm. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt.

a) Tính khối lượng hợp kim thép mỗi loại từ hai loại thép trên dùng để luyện được 500 tấn thép chứa 16% crôm.

b) Nhà máy dự định luyện ra loại thép không gỉ Ferritic từ 100 tấn thép chứa 10% crôm và x tấn thép chứa 30% crôm. Hỏi x nằm trong khoảng nào?

Câu 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại E và F (E khác B, F khác C). Các đoạn thẳng BF và CE cắt nhau tại H, tia AH cắt BC tại K.

a) Chứng minh $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$, từ đó suy ra tứ giác AEHF nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của AH và (O) (D nằm giữa A và H), chứng minh $BD^2 = BK \cdot BC$ và $\angle BDH = \angle BFD$

c) Trong trường hợp góc $\angle BAC = 60^\circ$ và $BC = 6$ cm, tính độ dài đoạn thẳng EF và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN LOIGIAIHAY.COM

Câu 1 (TH): Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2}$

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.
b) Tìm những điểm M thuộc (P) có tung độ và hoành độ bằng nhau.

Cách giải:

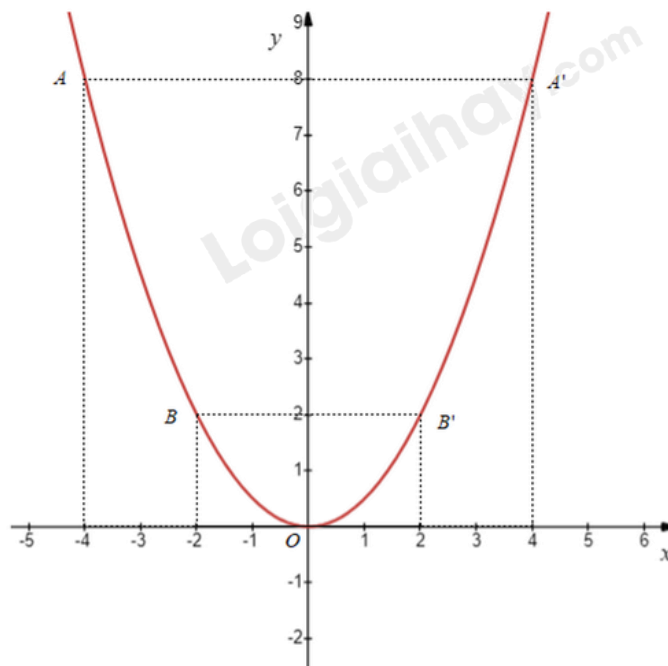
- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số trên.

Ta có bảng giá trị sau:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{x^2}{2}$	8	2	0	2	8

Đồ thị hàm số là đường cong parabol đi qua các điểm $O(0;0); A(-4;8); B(-2;2); A'(4;8); B'(2;2)$.

Ta được đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ như sau:



- b) Tìm những điểm M thuộc (P) có tung độ và hoành độ bằng nhau.

Điểm có tung độ và hoành độ bằng nhau có dạng $M(x_0; x_0)$ thì $x_0 = \frac{x_0^2}{2}$

Suy ra $x_0^2 = 2x_0$

$$x_0^2 - 2x_0 = 0$$

$$x_0(x_0 - 2) = 0$$

$$x_0 = 0 \text{ và } x_0 = 2$$

Vậy những điểm M thuộc (P) có tung độ và hoành độ bằng nhau là $M(0;0)$ và $M(2;2)$.

Câu 2 (TH): Cho phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$

a) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

b) Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1(x_1 + 2024) + x_2(x_2 + 2025) - x_2$.

Cách giải:

a) Chứng minh phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 0$ có $a = 2; b = -5; c = 1$ nên ta có:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 25 - 8 = 17 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = x_1(x_1 + 2024) + x_2(x_2 + 2025) - x_2$

Áp dụng định lí Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có: $A = x_1(x_1 + 2024) + x_2(x_2 + 2025) - x_2$

$$A = x_1^2 + 2024x_1 + x_2^2 + 2025x_2 - x_2$$

$$A = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 + (2024x_1 + 2024x_2)$$

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2024(x_1 + x_2)$$

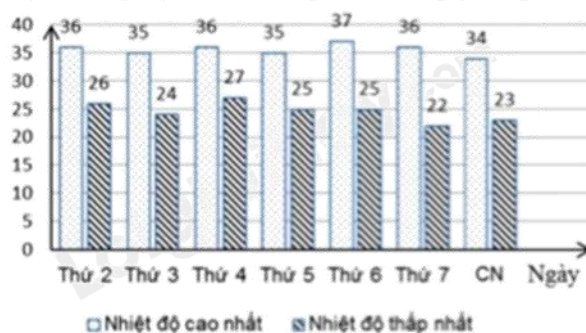
$$A = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2024 \cdot \frac{5}{2}$$

$$A = \frac{20261}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{20261}{4}.$$

Câu 3 (TH): Biên độ nhiệt là khoảng cách chênh lệch giữa nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất trong cùng một khoảng thời gian nhất định (một ngày, một tháng, một năm,...) của cùng một vùng địa lí. Biểu đồ cột kép dưới đây biểu diễn nhiệt độ (độ C) các ngày trong một tuần tại Thành phố Hồ Chí Minh.

Nhiệt độ Nhiệt độ cao nhất, thấp nhất các ngày trong tuần



a) Trong tuần này, ngày có biên độ nhiệt lớn nhất của thành phố Hồ Chí Minh là thứ mấy?

b) Chọn ngẫu nhiên một ngày trong tuần, tính xác suất của các biến cố sau:

A: “Ngày được chọn có nhiệt độ cao nhất không quá 35 độ C”.

B: “Ngày được chọn có biên độ nhiệt nhỏ hơn 12 độ C”.

Cách giải:

a) Dựa vào biểu đồ cột kép, ta có biên độ nhiệt của các ngày trong tuần là:

Thứ 2: $36 - 26 = 10$, thứ 3: $35 - 24 = 11$, thứ 4: $36 - 27 = 9$; thứ 5: $35 - 25 = 10$;

Thứ 6: $37 - 25 = 12$; thứ 7: $36 - 22 = 14$; chủ nhật: $34 - 23 = 11$.

Vậy ngày có biên độ nhiệt lớn nhất trong tuần của thành phố Hồ Chí Minh là thứ 7.

b) Ta có số ngày có nhiệt độ cao không quá 35 độ C là 3 (ngày).

Suy ra số phần tử của biến cố A là 3.

Xác suất để ngày được chọn có nhiệt độ cao nhất không quá 35 độ C là $\frac{3}{7}$.

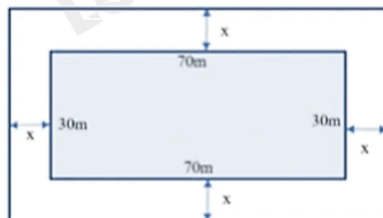
Có số ngày có biên độ nhiệt nhỏ hơn 12 độ C là 5 (ngày).

Suy ra số phần tử của biến cố B là 5.

Xác suất để ngày được chọn có biên độ nhiệt nhỏ hơn 12 độ C là $\frac{5}{7}$.

Câu 4 (VD): Một khu vườn hình chữ nhật (phần in đậm) có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 70m và 30m.

Người ta dự tính mở rộng thêm khu vườn bằng cách cải tạo thêm X (mét) về phía ngoài của chiều dài và chiều rộng khu vườn như hình vẽ.



a) Viết biểu thức S biểu diễn theo X diện tích của khu vườn hình chữ nhật sau khi mở rộng.

b) Biết rằng sau khi mở rộng thì diện tích của khu vườn lớn hơn diện tích ban đầu $1150m^2$.

Tìm giá trị của X (làm tròn đến hàng phần mười của mét).

Cách giải:

a) Viết biểu thức S biểu diễn theo X diện tích của khu vườn hình chữ nhật sau khi mở rộng.

Chiều rộng của khu vườn hình chữ nhật sau khi mở rộng là:

$$30 + X + X = 30 + 2X \text{ (m)}$$

Chiều dài của khu vườn hình chữ nhật sau khi mở rộng là:

$$70 + X + X = 70 + 2X \text{ (m)}$$

Diện tích của khu vườn hình chữ nhật sau khi mở rộng là:

$$(30 + 2X).(70 + 2X)(m^2)$$

b) Biết rằng sau khi mở rộng thì diện tích của khu vườn lớn hơn diện tích ban đầu $1150m^2$.

Tìm giá trị của X (làm tròn đến hàng phần mười của mét).

$$\text{ĐKXD: } X > 0$$

Diện tích của khu vườn ban đầu là: $70.30 = 2100 (m^2)$

Vì sau khi mở rộng thì diện tích của khu vườn lớn hơn diện tích ban đầu $1150m^2$ nên ta có phương trình:

$$(30 + 2X).(70 + 2X) = 2100 + 1150 = 3250$$

$$2100 + 60X + 140X + 4X^2 = 3250$$

$$4X^2 + 200X - 1150 = 0$$

$$4X^2 + 200X - 1150 = 0$$

Ta có $\Delta' = 14600 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$X_1 \approx 5,2(tm); X_2 \approx -55,2(l)$$

Vậy giá trị của X là khoảng 5,2 m.

Câu 5 (VD): Một quả dưa hấu không hạt ruột đỏ dạng hình cầu có đường kính 25cm và phần vỏ dày 2cm.

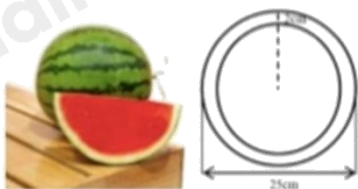
a) Coi phần ruột màu đỏ cũng có dạng hình cầu có cùng tâm với quả dưa hấu. Tính thể tích phần ruột quả dưa hấu.

(Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của cm^3)

b) Người ta ép phần ruột màu đỏ của quả dưa hấu trên thì thể tích nước ép thu được bằng 80% thể tích phần ruột. Nước ép dưa hấu sẽ được đựng trong các ly thủy tinh giống nhau, phần lòng trong dạng hình trụ có chiều cao 10cm và đường kính đáy lòng trong là 5cm. Mỗi ly chỉ chứa 70% thể tích. Hỏi để đựng nước ép của quả dưa hấu nói trên thì cần ít nhất bao nhiêu cái ly?

Biết công thức thể tích hình trụ là $V = pR^2h$ (R là bán kính đáy; h là chiều cao); công thức tính thể tích hình

cầu là $V = \frac{4}{3}pR^3$.



Cách giải:

a) Bán kính của phần ruột quả dưa hấu là: $\frac{25 - 2.2}{2} = 10,5(cm)$

Thể tích phần ruột của quả dưa hấu là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.10,5^3 \approx 4849,05(cm^3)$$

b) Thể tích nước ép dưa hấu là: $V_n = 80\% \cdot 4849,05 = 3879,24 \text{ (cm}^3\text{)}$

Thể tích của phần đựng nước ly thủy tinh là: $V_l = 70\% \cdot \pi R^2 h = 70\% \cdot \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 10 \approx 137,44 \text{ (cm}^3\text{)}$

Ta có: $\frac{V_n}{V_l} = \frac{3879,24}{137,44} \approx 28,22$

Do đó cần ít nhất 29 cái ly để đựng hết nước ép của quả dưa hấu.

Câu 6 (VD): Thép không gỉ Ferritic là họ thép hợp kim có chứa từ 12 đến 27 phần trăm crôm. Một nhà máy luyện thép hiện có sẵn một lượng hợp kim thép chứa 10% crôm và một lượng hợp kim thép chứa 30% crôm. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt.

a) Tính khối lượng hợp kim thép mỗi loại từ hai loại thép trên dùng để luyện được 500 tấn thép chứa 16% crôm.

b) Nhà máy dự định luyện ra loại thép không gỉ Ferritic từ 100 tấn thép chứa 10% crôm và x tấn thép chứa 30% crôm. Hỏi x nằm trong khoảng nào?

Cách giải:

a) Tính khối lượng hợp kim thép mỗi loại từ hai loại thép trên dùng để luyện được 500 tấn thép chứa 16% crôm.

Gọi a là số tấn hợp kim thép chứa 10% crom cần dùng ($a > 0$)

Khi đó, $500 - a$ là số tấn hợp kim thép 30% cần dùng.

Ta có:

$$a \cdot 10\% + (500 - a) \cdot 30\% = 500 \cdot 16\%$$

$$10a + (500 - a) \cdot 30 = 500 \cdot 16$$

$$a = 350 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy số hợp kim thép chứa 10% crom cần dùng là 350 tấn, số hợp kim thép chứa 30% cần dùng là 150 tấn.

b) Nhà máy dự định luyện ra loại thép không gỉ Ferritic từ 100 tấn thép chứa 10% crôm và x tấn thép chứa 30% crôm. Hỏi x nằm trong khoảng nào?

Ta có số crôm từ 100 tấn thép chứa 10% crôm là $10\% \cdot 100 = 10$ (tấn)

Số crôm từ x tấn thép chứa 30% crom: $0,3x$ (tấn)

Tổng số tấn thép là $100 + x$ (tấn)

Phần trăm crôm có trong tổng số tấn thép nhà máy dự định luyện ra là: $\frac{10 + 0,3x}{100 + x} \cdot 100$

Theo đầu bài, thép không gỉ Ferritic có chứa từ 12 đến 27 phần trăm crôm, ta có:

$$12 \leq \frac{10+0,3x}{100+x} \cdot 100 \leq 27$$

$$1200 + 12x \leq 1000 + 30x \leq 2700 + 27x$$

$$\begin{cases} 1200 + 12x \leq 1000 + 30x \\ 1000 + 30x \leq 2700 + 27x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x \geq 200 \\ 3x \leq 1700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{100}{9} \\ x \leq \frac{1700}{3} \end{cases}$$

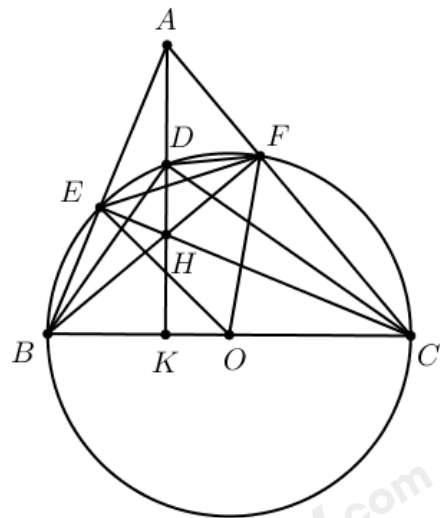
$$\frac{100}{9} \leq x \leq \frac{1700}{3}$$

Vậy x nằm trong khoảng từ $\frac{100}{9}$ đến $\frac{1700}{3}$

Câu 7 (VD): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại E và F (E khác B, F khác C). Các đoạn thẳng BF và CE cắt nhau tại H, tia AH cắt BC tại K.

- a) Chứng minh $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$, từ đó suy ra tứ giác AEHF nội tiếp.
- b) Gọi D là giao điểm của AH và (O) (D nằm giữa A và H), chứng minh $BD^2 = BK \cdot BC$ và $\angle BDH = \angle BFD$
- c) Trong trường hợp góc $\angle BAC = 60^\circ$ và $BC = 6$ cm, tính độ dài đoạn thẳng EF và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF.

Cách giải:



- a) Ta có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ (tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 Khi đó $\triangle AEH$ vuông tại E nên A, E, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH
 Tương tự $\triangle AFH$ vuông tại F nên A, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH
 Vậy A, E, F, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH hay tứ giác AEHF nội tiếp.

b) Ta có $BDC = 90^\circ$ (tính chất góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle BDK$ và $\triangle BCD$ có

$\angle CBD$ chung

$$\angle BKD = \angle BDC (= 90^\circ)$$

Nên $\triangle BDK \sim \triangle BCD (g.g)$

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{BC} = \frac{BK}{BD} \text{ hay } BD^2 = BK \cdot BC$$

Do $\triangle BDK \sim \triangle BCD (g.g)$ nên $\angle BDH = \angle BCD$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle BCD = \angle BFD$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Nên $\angle BDH = \angle BFD$ (đpcm)

c) Do $\triangle AFB$ vuông tại F nên $\angle ABF = 90^\circ - \angle BAF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Mà $\angle EBF$ là góc nội tiếp chắn cung EF và $\angle EOF$ là góc ở tâm chắn cung EF nên $\angle EOF = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

Xét $\triangle OEF$ cân tại O (do $OE = OF$) có $\angle EOF = 60^\circ$ nên $\triangle OEF$ là tam giác đều

$$\text{Suy ra } EF = OE = OF = \frac{1}{2} BC = 3 \text{ cm.}$$

Xét $\triangle ABC$ có đường cao CE và BF cắt nhau tại H nên H là trực tâm

Suy ra $AH \perp BC$

Xét $\triangle AHF$ và $\triangle BHK$ có $\angle AHF = \angle BHK$ (đối đỉnh) và $\angle AFH = \angle BKH (= 90^\circ)$

Suy ra $\angle HAF = \angle HBK$ hay $\angle HAF = \angle FBC$

Kết hợp $\angle AFH = \angle BFC (= 90^\circ)$ suy ra $\triangle AFH \sim \triangle BFC (g.g)$

$$\text{Suy ra } \frac{AH}{BC} = \frac{AF}{BF} = \cot \angle FAB = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Suy ra } AH = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$$

Xét tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên bán kính bằng $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

----- HẾT -----